गणूच्या गणिती गप्पा

दीपक मो. वाडेकर



गणूच्या गणिती गप्पा

दीपक मो. वाडेकर
एम्. एस्सी.

प्रकाशक
राजेश वाडेकर
अभिषेक एन्टरप्राईज
गुरुदैवत को.ऑ. हौ. सो.
मानपाडा रोड,
डोंबिवली (पुर्व)
फोन : ४७६१ ३८

प्रकाशन क्रमांक : ७

आवृत्ती पाचवी : १९९७

मुखपृष्ठ
वि. ना. जाधव

मुद्रक
कल्पना मुद्रणालय
टिळक रोड,
पुणे : ४११ ०३०

ओळख

आमच्या शेजारच्या घरात एक गृहस्थ राहतात. त्यांचं नाव शंकरराव गणपुले. त्यांना एक मुलगा आहे. त्याचं नाव गणपती. पण त्याला सगळेजण गणू म्हणतात. गणू गणपुले हे नाव म्हणायला पण बरं वाटतं नाही का? गणू अजून 'लहान' आहे. म्हणजे त्याला अजून बारा वर्षं पुरी झालेली नाहीत. सध्या त्याला अकरा वर्षं पूर्ण झाली आहेत. पण त्याची बडबड मात्र 'मोठ्यांसारखी' चालू असते. म्हणजे त्याच्या बोलण्यातले विषय मोठ्या माणसांचे असतात. तो सारखा बोलत असतो. त्याच्या बोलण्याचा आसपासच्या समस्त मोठ्या मंडळींना भयंकर त्रास होतो. कारण गणू बोलतो ते प्रश्न विचारण्यासाठीच! गणूच्या एकाहून एक अवघड प्रश्नांना उत्तरं देताना सर्व मोठ्यांच्या नाकी नऊ येतात. मग गणूची पीडा टाळण्यासाठी सगळेजण त्याला शेजारच्याच प्रा. सहस्रबुद्ध्यांकडे पिटाळतात. त्यांचं खरं नाव भास्कर! पण ते 'भास्कराचार्य' म्हणून प्रसिद्ध आहेत. कारण ते गणित शिकवतात ना! भास्कराचार्य गणूचे प्रश्न शांतपणे ऐकून घेतात आणि त्यांची गणूला समजतील अशी उत्तरंही देतात.

गणूला पहिल्यांदा गणिताचा फार कंटाळा असायचा. 'पाढे पाठ करा, व्याख्या सांगा, कोष्टकं पाठ करा, पण कशाला? काय त्याचा उपयोग? ही गणिताची कटकट हवीच कशाला मुलांच्या मागे?' असं तो नेहमी म्हणायचा. पण भास्कराचार्यांची ओळख झाल्यापासून त्याचं मत आता हळुहळू बदललंय्. 'गणित म्हणजे गंमतीदार गोष्ट' असं आता तो म्हणतो. असं कसं काय झालं? गणूच्या गणिती गप्पा तुम्ही ऐकल्यात तर कदाचित् तुम्हीही असंच म्हणाल. ऐका तर!

१

गणू प्रथमच आमच्या घरी आला तेव्हा मी एकटाच घरात होतो. गणूच्या डोक्यात एखादा प्रश्न आला की तो कोणाला तरी विचारल्याशिवाय त्याला सुचत नाही. त्या दिवशी त्याला प्रश्न सुचला तेव्हा मी नेमका समोर होतो.

'काका मला एक शंका आहे. विचारू का?' गणू म्हणाला. मी मनात म्हटलं, 'एवढ्याशा मुलाची शंका ती काय असणार? सहज सांगून टाकू.' 'विचार ना' मी म्हटलं.

'काका आगगाडीच्या दोन रुळातलं अंतर किती असतं हो?'

'काही तरी ५ फूट नि ३-४ इंच असतं. म्हणजे ब्रॉड गेजचं हं. मीटर गेजचं तीन फूटच असतं.' मी केव्हा तरी ऐकलेलं होतं ते सांगून टाकलं.

'समजा, ५ फूट ४ इंच असेल. पण ते सगळीकडे सारखंच असतं ना?' गणू म्हणाला.

'हो. अरे आगगाडीचे रुळ समांतर नसतात का? समांतर म्हणजे सगळीकडे सारखं अंतर' मी म्हटलं.

'ते झालंय् आमच्या भूमितीत. कालच बाईंनी शिकवलंय् आम्हाला. पण काका, मग आपण लांबपर्यंत रुळांकडे पाहिलं तर ते एकमेकांना टेकल्यासारखे का दिसतात?' गणू म्हणाला.

'अरे, लांब गेल्यावर रुळ जवळ आल्याचा नुसता भास होतो आपल्याला' मी म्हटलं.

'अहो काका, तेच तर मला विचाराचंय्. रूळ जवळ आल्याचा भास आपल्याला का होतो? आणि रुळच असे दिसतात असं नाही. रस्त्याचं पण असंच दिसतं.' गणू आपला मुद्दा सोडत नव्हता.

'हे बघ गणू, भास होतो हे नक्की. का होतो हे तू भास्कराचार्यांनाच विचार' मी सुज्ञपणानी माघार घेतली.

गणूला येताना पाहून भास्कराचार्य हसले. गणूचा चौकस स्वभाव त्यांना ठाऊक होता. गणू काहीतरी शंका विचारायला आला आहे ह्याबद्दल त्यांना शंका नव्हती.

'काय गणू? काही तरी प्रश्न अडलेला दिसतोय?' ते म्हणाले.

'हो. आगगाडीच्या रुळातलं अंतर सगळीकडे सारखंच असतं. तरीही लांबचे रूळ जवळ आल्यासारखे दिसतात. आपल्याला असा भास का होतो?' गणूनी प्रश्न केला.

'शाबास गणू! तुझा प्रश्न चांगला आहे नि महत्त्वाचा पण आहे. आणि तू तो नीट विचारलायस्. प्रश्न योग्य शब्दात विचारणं हे पण कठीण असतं बरं का गणू' भास्कराचार्य गणूवर फारच खूष होते.

'पण काका, उत्तर ?' गणू म्हणाला.

'उत्तरं सांगतो ना. तुझा प्रश्न कठीण वाटला तरी त्याचं उत्तर अगदी सोपं आहे. गणू तुम्हाला शाळेत भूमिती शिकवत असतील ना?'

हो शिकवतात ना. कालच बाईंनी आम्हाला समांतर रेषा म्हणजे काय ते शिकवलं. म्हणून तर मला हा प्रश्न सुचला.' गणू म्हणाला.

'मग कोन म्हणजे काय ते पण तुला ठाऊक असेल?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'हो, दोन रेषा ज्या ठिकाणी एकमेकींना मिळतात तिथे कोन होतो ना?' गणू म्हणाला.

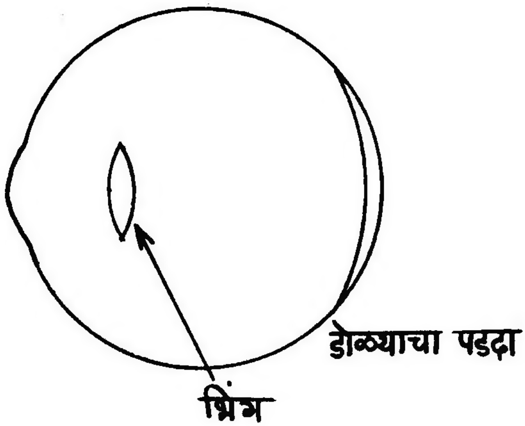
'बरोबर. आता असं समज की तुझ्यासमोर एक झाड आहे. नि तू त्या झाडाकडे बघतोयस्. झाडावर पडलेले प्रकाशाचे किरण परत फिरून तुझ्या डोळ्यात शिरले की तुला झाड दिसेल. समजलं ना तुला हे' ? भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'हो, पण त्यात कोन कुठे येतो ते नाही कळलं' गणू म्हणाला.

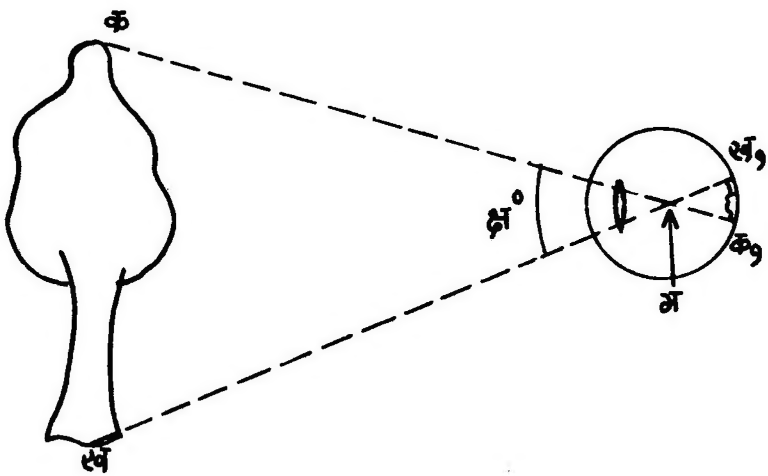
'हं, ते सांगतो ना आता. आता मी तुला एक आकृती काढून दाखवतो. त्या आकृतीत काय दाखवलंय् ते मला सांग पाहू' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी गणूला एक आकृती काढून दाखवली. (आकृती १ पहा.)

'ह्या आकृतीत डोळा दाखवला आहे. डोळ्यात एक भिंग असतं आणि भिंगाच्या पलीकडे डोळ्याचा पडदा असतो असं दाखवलं आहे.' गणू म्हणाला.

'बरोबर. भिंगामधून प्रकाशकिरण जाताना ते एकमेकांकडे वळतात नि बरोबर डोळ्याच्या पडद्यावर एकत्र येतात. किरण जिथे एकत्र येतात त्या ठिकाणी डोळ्याच्या पडद्यावर वस्तूचं लहान प्रतिबिंब दिसतं. त्याला वस्तूची प्रतिमा म्हणतात. ह्या प्रतिमेची जाणीव मेंदूला डोळ्यातील चेतातंतूंमुळे होते. तेव्हा



आकृती १



आकृती २

आपल्याला वस्तू दिसते. समजलं का तुला हे ?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'हो समजलं.' गणू म्हणाला.

'बरं. आता ही दुसरी आकृती बघ' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी गणूला आणखी एक आकृती दाखवली. (आकृती २ पहा)

'ह्या आकृतीत काय दाखवलंय् सांग पाहू!' ते म्हणाले.

'ह्यात एक झाड आहे. झाडाच्या शेंड्यावर 'क' हा एक बिंदू आहे. तळाशी 'ख' हा एक बिंदू आहे. क आणि ख पासून निघालेले किरण डोळ्याच्या भिंगातून जाऊन डोळ्याच्या पडद्यावर झाडाची उलटी प्रतिमा पडली आहे.' गणूनी सविस्तर उत्तर दिलं.

'शाब्बास! आता ह्या आकृतीत कोनाचा संबंध कुठे येतो ते समजलंय् का तुला?' भास्कराचार्यांनी विचारलं. आकृतीकडे पाहून गणूनी थोडावेळ विचार केला.

'हो समजलं. झाडाकडून येणारे किरण 'ग' बिंदूत एकत्र झाले आहेत. तिथे कोन झाला आहे.' गणू म्हणाला.

'बरोबर. त्या कोनाचं नाव सांग पाहू'

'$\angle$कगख, बरोबर आहे ना ?' गणूनी विचारलं.

'बरोबर, ह्या कगख कोनाला आपण 'दृष्टिकोन' असं म्हणू या. समजलं ?'

गणूनी होकारार्थी मान हलवली.

'आता पुढे पाहू. आपल्याला वस्तूचा जो आकार दिसतो तो तिच्या डोळ्यात पडलेल्या प्रतिमेच्या आकाराप्रमाणे दिसतो. म्हणजे प्रतिमेचा आकार मोठा असला तर वस्तू मोठी दिसते प्रतिमेचा आकार लहान असला तर वस्तू लहान दिसते.' भास्कराचार्यांनी एवढं सांगितलं इतक्यात गणू एकदम म्हणाला, 'हं, समजलं मला, समजलं' त्याला खूप आनंद झालेला दिसत होता.

'काय समजलं?' भास्कराचार्यांनी प्रश्न केला.

'सांगतो. डोळ्यात पडलेल्या प्रतिमेचा आकार दृष्टिकोनावर अवलंबून असतो हे समजलं मला' गणू म्हणाला.

'म्हणजे काय ते अजून नीट सांग' भास्कराचार्य म्हणाले.

'म्हणजे वस्तूनी डोळ्याशी केलेला दृष्टिकोन मोठा असला की वस्तू मोठी दिसते नि दृष्टिकोन लहान असला की वस्तू लहान दिसते' गणूनी उत्तर दिलं.

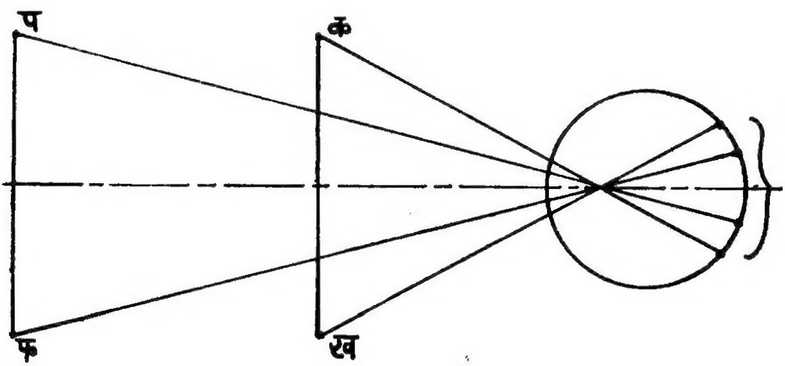
'अगदी बरोबर. पण गणू अजून एक मुद्दा राहिलाय्. दूरचे रूळ जवळ

आल्यासारखे दिसतात त्याच्याशी ह्याचा काय संबंध आहे ते सांग' भास्कराचार्य म्हणाले.

गणूनी थोडावेळ विचार केला नि त्याला एकदम उत्तर सुचलं.

'समजलं! वस्तू जवळ असली तर तिचा दृष्टिकोन मोठा होतो नि दूर असली तर तिचा दृष्टिकोन लहान होतो' गणू म्हणाला.

'तू काय म्हणतोस त्याची आकृती काढून दाखवतोस का?' भास्कराचार्य गणूला एकाहून एक कठीण कामं सांगत होते नि तो ती करत होता. भास्कराचार्यांनी सांगितलेली आकृती गणूनी काढली. (आकृती ३ पहा.)



आकृती ३

गणूनी काढलेल्या आकृतीत 'कख' ही एक वस्तू डोळ्यापासून वेगवेगळ्या अंतरावर ठेवलेली असताना तिचा दृष्टिकोन किती होतो ते दाखवलेलं होतं. जवळच्या वस्तूपेक्षा दूरच्या वस्तूनी केलेला दृष्टिकोन लहान असतो म्हणून तिची प्रतिमा लहान पडते हे गणूनी नीट दाखवलं होतं.

'आता ह्या आकृतीवरून रुळांचा प्रश्न कसा सुटतो ते सांग' भास्कराचार्य म्हणाले.

'सांगतो. समजा कख हे रुळांमधलं अंतर आहे. तसंच पफ हे जरा दूरच्या ठिकाणी दाखवलेलं अंतर आहे. तर कखच्या प्रतिमेपेक्षा पफची प्रतिमा लहान पडेल. म्हणून कख अंतरापेक्षा पफ अंतर आपल्याला कमी वाटेल. आणखी

दूरचं रुळांतलं अंतर पफ पेक्षा कमी वाटेल. म्हणजेच दूर गेलेले रुळ एकमेकांच्या जवळ आल्यासारखे दिसतील' गणूनी सविस्तर उत्तर दिलं.

'वा गणू, छान उत्तर दिलंस तू. तुला आता ह्या प्रश्नाचं उत्तर चांगलं समजलंय्' भास्कराचार्य म्हणाले.

'हो काका, मला हे आता चांगलं समजलंय्.' गणू खुषीत येऊन म्हणाला.

'बरं, मग मी आता माझ्या कामाला लागू ?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

भास्कराचार्यांचा निरोप घेऊन गणू सरळ आमच्या घरी आला नि मला त्या प्रश्नाचं उत्तर त्यानी सगळं परत समजावून सांगितलं.

२

सकाळी उठून बागेतला पालापाचोळा झाडून काढून मी कुंपणाजवळच्या आंब्याच्या झाडाखाली त्याचा मोठा ढीग केला होता. तो पेटवण्यासाठी काडेपेटी हवी होती. ती आणायला मी घरात गेलो. काडेपेटी घेऊन बाहेर येतो तोच गणू तिथे हजर झाला.

'काका, मी पेटवू का शेकोटी?' त्यानी विचारलं.

'पेटव की' त्याला काडेपेटी देत मी म्हटलं.

गणूनी पाचोळ्याखाली पेटलेली काडी धरली. फुंकर घालून त्यानी हळूहळू जाळ मोठा केला.

थोड्याच वेळात शेकोटी जोरात पेटली. तिच्या ज्वाळा उंच भडकू लागल्या आणि झाडाखाली धुराचा डोंब उसळला. त्या धुरामधून आंब्याच्या पानांमधून पडलेले उन्हाचे कवडसे जमिनीपर्यंत पडलेले दिसू लागले.

'काका, कवडशांच्या रेषा समांतर का दिसतात ते मला आता कळलंय्'. गणू म्हणाला. एखादा विषय गणूच्या डोक्यात शिरला की तो तिथे घर करून राहतो. गणू तो विषय लवकर विसरत नाही.

'कसं कळलं रे ते तुला?' मी विचारलं.

'ते किरण सूर्याकडून येतात. म्हणजे खूप लांबून येतात. त्यांचा दृष्टिकोन इतका लहान असतो की ते जवळजवळ समांतरच असतात.' गणूनी खुलासा केला. भास्कराचार्यांनी दृष्टिकोनाचा विषय त्याला चांगलाच समजावलेला दिसत होता. इतक्यात एक विमान आमच्या डोक्यावरून गेलं. गणू विमानाकडे बघत होता. हळूहळू विमान दूर गेलं आणि दिसेनासं झालं. गणूच्या डोक्यात विचारचक्र चालू होतं.

'काका, ते विमान लांब जाताना पाहिलंत तुम्ही?' तो म्हणाला.

'पाहिलं की! त्यातून तुला काही प्रश्न सुचलाय् की काय?' मी चिंता व्यक्त केली.

'प्रश्न नाही सुचला. पण ते लांब जाताना हळूहळू लहान होत जातं नि

शेवटी तर अगदी ठिपक्यासारखं दिसतं, ते का ह्याचं उत्तर मला समजलंय्' गणूच्या खुलाशानी माझी चिंता दूर झाली.

'का बरं ते असं लहान होत जातं सांग पाहू?' मी म्हटलं.

'कारण अगदी सोपं आहे. जसजसं विमान लांब जातं तसतसा त्याचा 'दृष्टिकोन' लहान होत जातो. त्यामुळे त्याची डोळ्यात पडणारी प्रतिमाही लहान होते. म्हणून ते लहान लहान होत जातं.' गणूनी सविस्तर खुलासा केला.

'गणू, प्रत्येक बाबतीत हा दृष्टिकोनच येतोय् की पुढे. हे दृष्टिकोन प्रकरण फार महत्त्वाचं दिसतंय्. आणखी कुठेकुठे तुझा हा 'दृष्टिकोन' उपयोगी पडणार आहे?' मी कौतुकानी गणूला विचारलं. माझ्या प्रश्नाचं उत्तर त्याला चटकन् सुचेना.

'भास्करकाकांना विचारतो आता' असं म्हणून तो निघून गेला. त्या दिवशी संध्याकाळी शाळा सुटल्यावर गणू भास्कराचार्यांकडे गेला. सकाळी घडलेली सर्व हकीगत त्यानी भास्कराचार्यांना सांगितली. हे सर्व सांगून झाल्यावर गणूनी मनातला प्रश्न त्यांना विचारला.

'काका, जसं विमान लांब गेलं की लहान दिसतं, तसं आणखी कुठे कुठे होतं? त्या सगळ्या बाबतीत 'दृष्टीकोन' लहान किंवा मोठा होणं ह्याचाच संबंध असतो का?'

'अरे असं आणखी कुठे होतं हे सांगायला लागलो तर वेळ पुरणार नाही मला. तू कधी डोंगरावर चढलायस् की नाही?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'हो. चढलोय् की! गेल्याच वर्षी आमची ट्रिप रायगडावर गेली होती, तेव्हा मी सबंध डोंगर पायी चढलो होतो. पण मुळीच दमलो नव्हतो मी' गणू म्हणाला.

'मग डोंगरावरून खाली पाहिलं की कसं दिसतं सांग पाहू?' भास्कराचार्य म्हणाले.

'खालच्या झोपड्या, झाडं, माणसं अगदी लहान दिसतात. आणि नदी तर अगदी एखाद्या दोरीसारखी दिसते' गणू म्हणाला.

'मग हे दूरच्या वस्तू लहान दिसण्याचंच उदाहरण नाही का? आणि गणू उलटा विचारही करून बघ. दूर असलेली वस्तू आपल्याजवळ येतेय की लांब जातेय हे आपण कसं ओळखतो, ठाऊक आहे का तुला?'

'हो, वस्तू लहान लहान होत गेली की ती लांब जातेय् हे कळतं नि

मोठी मोठी होताना दिसली की ती जवळ येतेयृ हे कळतं.'

'मग जवळ येणारी वस्तू मोठी होताना का दिसते सांग पाहू!' भास्कराचार्य म्हणाले. ह्या प्रश्नानी गणूच्या डोक्यात एकदम प्रकाश पडला.

'हं, समजलं, जवळ येणाऱ्या वस्तूचा दृष्टीकोन मोठा मोठा होत जातो म्हणून ती वस्तू मोठी होताना दिसते',

गणू आनंदानी म्हणाला. एखाद्या प्रश्नाची नीट उकल झाली म्हणजे जो आनंद होतो तो त्याच्या चेहेऱ्यावर दिसत होता.

'सूर्यग्रहण कसं होतं हे ठाऊक आहे का तुला?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'हो, सूर्य आणि पृथ्वी ह्यांच्यामधे चंद्र आला की तों सूर्याला झाकतो, म्हणून सूर्यग्रहण होतं.' गणू म्हणाला.

'आणि खग्रास ग्रहण म्हणजे काय सांग पाहू?'

'सूर्याचं संपूर्ण बिंब चंद्रानी झाकून टाकलं की त्याला खग्रास ग्रहण म्हणतात,' इति गणू.

'म्हणजे आपल्याला दिसणारं सूर्याचं बिंब आणि चंद्राचं बिंब ह्यांचे आकार सारखेच असायला पाहिजेत नाही का?'

भास्कराचार्य हळूहळू आपल्या तत्त्वाकडे येत होते. 'हो, नाहीतर चंद्रबिंब सूर्याला पूर्णपणे झाकू शकणार नाही.' विचार करत गणू म्हणाला.

'पण सूर्य आणि चंद्र ह्यांचे खरे आकार कसे आहेत ठाऊक आहे का तुला?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'हो, सूर्य तारा आहे नि तो खूप मोठा आहे. चंद्र उपग्रह आहे, तो पृथ्वीपेक्षा खूप लहान आहे' गणू म्हणाला. इतक्यात भास्कराचार्यांना काय मुद्दा सांगायचा आहे हे त्याला समजलं.

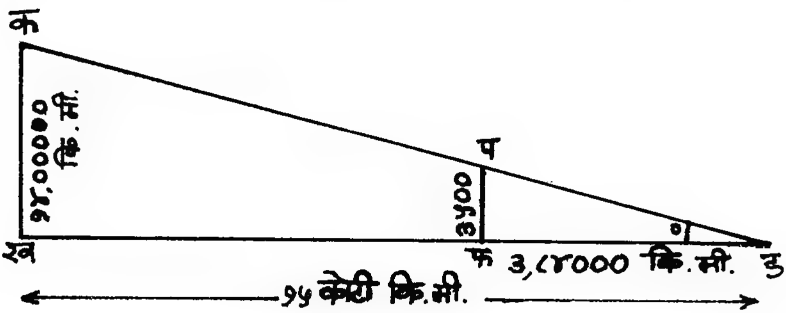
'हं, कळलं तुम्हाला काय म्हणायचंय् ते.' तो आनंदाने म्हणाला.

'काय म्हणायचंय् सांग पाहू!

'सूर्य खूप मोठा आहे पण खूप दूरही आहे म्हणून त्याचा आकार खऱ्या आकारापेक्षा खूप लहान दिसतो. चंद्र लहान आहे पण त्या मानानी जवळ आहे. म्हणून त्याचा आकार सूर्यबिंबाच्या मानाने कमी लहान दिसतो. पण काका त्यांचे खरे आकार केवढे आहेत हो? ते काही आम्हाला शिकवलं नाहीए' गणू म्हणाला.

'ते मी सांगतो तुला. हे बघ पृथ्वीपासून सूर्य सुमारे १५ कोटी कि.मी.

अंतरावर आहे. आणि सूर्याचा व्यास सुमारे १४ लक्ष कि. मी. आहे. चंद्र पृथ्वीपासून सुमारे ३ लक्ष ८४ हजार कि. मी. दूर आहे आणि त्याचा व्यास ३५०० कि. मी. आहे. मात्र दोघेही आपल्या डोळ्यांशी जवळजवळ सारखाच दृष्टिकोन करतात. आता आपण आकृती काढून हे कसं होतं ते पाहू' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी कागदावर एक आकृती काढली. (आकृती १ पहा)



आकृती १

'हे बघ 'ड' हा डोळा आहे. 'कख' हा सूर्याचा व्यास आहे आणि 'खड' हे सूर्याचं अंतर आहे. 'पफ' हा चंद्राचा व्यास आहे आणि 'फड' हे चंद्राचं अंतर आहे. दोघांचाही ड पाशी होणारा दृष्टिकोन सारखाच म्हणजे $\frac{१}{२}^{\circ}$ किंवा ३० मिनिटांचा आहे. आता भूमितीच्या नियमांप्रमाणे $\frac{\text{कख}}{\text{पफ}}$ हे व्यासांचं गुणोत्तर व $\frac{\text{खड}}{\text{फड}}$ हे अंतरांचं गुणोत्तर ह्यांच्या किंमती सारख्याच यायला हव्यात. आता आपण गणित करून पाहू या काय उत्तर येतं ते' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी कागदावर $\frac{१४०००००}{३५००}$ आणि $\frac{१५००००००००}{३८४०००}$ अशी दोन गुणोत्तरं मांडली.

हे बघ गणू, पहिलं गुणोत्तर $\frac{१४०००००}{३५००} = \frac{४००}{१}$ इतकं आहे.

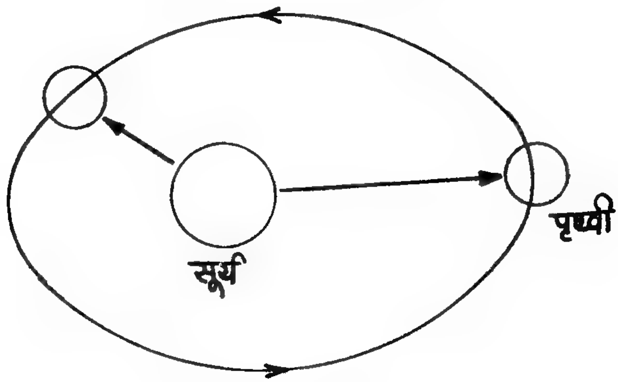
दुसरं गुणोत्तर $\frac{१५००००००००}{३८४०००} = \frac{१५०० \times १००}{३८४} = \frac{३९०}{१}$ इतकं येतं.

'पण काका ही उत्तरं अगदी सारखी नाहीत' गणूनी शंका काढली.

'ती उत्तरं अगदी सारखी नसली तरी जवळजवळ सारखी आहेत. ती सारखी नाहीत ह्याचं कारण आपण सूर्य-चंद्रांची अंतरं आणि व्यास ह्यांचे आकडे अगदी अचूक घेतलेले नाहीत' भास्कराचार्य खुलासा करू लागले.

'पण असं का?' गणूनी मधेच विचारलं.

'त्याला मुख्य दोन कारणं आहेत. एक म्हणजे सूर्याचं पृथ्वीपासून अंतर नेहमी सारखं नसतं. पृथ्वीचा मार्ग लंबवर्तुळाकार असल्यामुळे ते अंतर नेहमी सारखं येत नाही. काही वेळा कमी तर काही वेळा जास्त येतं.' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी गणूला आकृती काढून ते समजावून दिलं. (आकृती २ पहा)



आकृती २

'आणखी दुसरं कारण असं की आपल्याला गणित करायला सोपं जावं म्हणून आपण ते आकडे थोडे बदलून सोपे केले आहेत.'

'पण गणू, त्या दोन गुणोत्तरांमधला फरक इतका कमी आहे की त्यामुळे सूर्याच्या किंवा चंद्राच्या बिंबाच्या आकारात पडणारा फरक आपल्या लक्षातही येणार नाही' भास्कराचार्य म्हणाले.

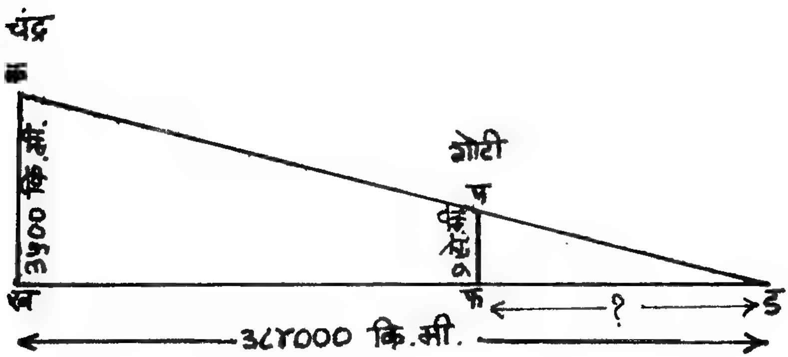
'पण काका, असे आकडे बदलून घेतले तर चालतं का?' गणूनी आणखी शंका काढली.

'हो! न चालायला काय झालं. हे बघ मी तुला एक गणित घालतो. ते आकडे न बदलता आणि आकडे बदलून असं दोन्ही रीतींनी करून पहा तू. म्हणजे तुला कळेल.' भास्कराचार्यांनी म्हटलं.

'हं चालेल! घाला गणित.' गणू म्हणाला

'गणित पुन्हा ग्रहणाचंच घेऊ. चंद्राला गोटीनी ग्रहण लागण्यासाठी म्हणजे त्याला झाकण्यासाठी आपण १ से. मी. व्यासाची गोटी आपल्या डोळ्यापुढे धरली तर ती किती अंतरावर ठेवावी लागेल ते काढ पाहू.'

भास्कराचार्यांनी गणित घातलं. गणूनी कागदावर आकृती काढून तिच्यावर आकडे घातले (आकृती ३ पहा).



आकृती ३

मग गणूनी $\frac{\text{पफ}}{\text{कख}}$ आणि $\frac{\text{फड}}{\text{खड}}$ ही दोन गुणोत्तर मांडली व ती समान असली पाहिजेत म्हणून $\frac{\text{पफ}}{\text{कख}} = \frac{\text{फड}}{\text{खड}}$ असं लिहिलं. मग त्यात दिलेले आकडे घातले तेव्हा $\frac{\text{फड}}{\text{३,८४,००० कि.मी.}} = \frac{\text{१ से.मी.}}{\text{३,५०० कि.मी.}}$ असं समीकरण

आलं.

गणूची हुशारी पाहून भास्कराचार्यांना आश्चर्य वाटलं नि आनंदही झाला.

'शाबास गणू! फारच छान गणित मांडलंस तू? आता आपण फडची किंमत फड = $\frac{३,८४,००० \text{ कि.मी.}}{३५०० \text{ कि.मी.}}$ × १ सेंमी. अशी लिहू. आता गणित सोडवण्यासाठी $\frac{३८४०००}{३५००}$ म्हणजे $\frac{३८४०}{३५}$ हा भागाकार करावा लागेल. भागाकार करून काय उत्तर येतं सांग पाहू' भास्कराचार्यांनी गणूला गणित जरा सोपं करून दिलं. गणूनी भागाकार करून उत्तर काढलं ते आलं १०९.७१४ सेमी.

'ठीक आहे. गणू बरोबर काढलंयस् तू उत्तर. आता आपण गणितातल्या आकड्यात थोडा बदल करु. चंद्राचं अंतर तू ३,८४,००० कि.मी. धरलंस त्या ऐवजी ३,८५००० कि.मी. धरुन गणित करुन पहा. म्हणजे आपण चंद्राचं अंतर १००० कि.मी.नी वाढवलंय्. आता $\frac{३८५०००}{३५००}$ हा भागाकार कर पाहू.' भास्कराचार्य म्हणाले.

गणूनी गणित केलं.

'काका, हे गणित फारच सोपं आहे. ३८५ ला ३५ नी बरोबर ११ चा भाग जातो. म्हणजे उत्तर ११० सेंमी. आलं.' गणू म्हणाला.

'पाहिलंस् ना. आपण गणितातला एक आकडा बदलल्यामुळे गणित खूप सोपं झालं आणि उत्तर अचूक नसलं तरी त्यातली चूक अगदी कमी आहे. कधी कधी असं अंदाजी उत्तरसुद्धा फार उपयोगी पडतं आणि ते पटकन् काढता येतं, भास्करचार्यांनी खुलासा केला, नि त्यावर 'पण एक लक्षात ठेव! परीक्षेतल्या गणितात नाही हं अशी रीत चालायची' असा इशाराही दिला. गणू त्या गणितामुळे कंटाळल्यासारखा दिसला तेव्हा त्यांनी विषय बदलला. आपलं 'दृष्टीकोनाचं तत्त्व' केवळ गणितापुरतंच महत्त्वाचं नाही. आणखीही पुष्कळ ठिकाणी ते उपयोगी पडतं बरं का?

गणू! तू सिनेमात एकदम मोठा होणारा किंवा एकदम लहान होणारा राक्षस पाहिला असशील ना?

भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'हो पाहिलाय्' गणू म्हणाला.

'मग राक्षस लहान-मोठा कसा होत असेल, सांग पाहू!' भास्कराचार्यांनी गणूला कोडं घातलं. पण हे कोडं त्यानी लगेच सोडवलं.

'अं:, त्यात काय? राक्षस जवळ जवळ येताना फोटो काढला की तो मोठा होणार आणि दूर दूर नेताना फोटो काढला की तो लहान होणार' गणू म्हणाला.

'शाबास! बघितलंस् आपल्या दृष्टिकोनाच्या तत्त्वाच्या सिनेमात कसा उपयोग होतो ते?' भास्करचार्य म्हणाले.

'चित्रकारसुद्धा ह्या तत्त्वाचा चित्रं काढताना उपयोग करतात' भास्कराचार्यांनी गणूला आणखी माहिती पुरवली.

'तो कसा काय?' गणूनी विचारलं.

'अरे चित्रात वेगवेगळ्या गोष्टी दाखवायच्या असतात. झाडं, घरं, रस्ता, डोंगर अशा गोष्टी दाखवताना त्यातल्या काही जवळ तर काही दूर आहेत हे कसं दाखवायचं कागदावर?'

भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'हं समजलं, जवळच्या वस्तू मोठ्या दाखवायच्या नि लांबच्या वस्तू लहान दाखवायच्या. होय ना?' गणूनी विचारलं.

'अगदी बरोबर! आता एखादं चित्र पाहशील तेव्हा हे नीट पहा बरं का?'

असं म्हणून भास्कराचार्यांनी गणूला निरोप दिला नि ते आपल्या अभ्यासात मग्न झाले.

३

आज रविवारची सुट्टी असल्यामुळे मी सकाळच्या प्रसन्न आणि थंडगार हवेत आमच्या बागेत फिरत होतो. फुलांचा सुगंध आणि वाऱ्याची झुळुक ह्यांनी फारच बरं वाटत होतं. पण हा आनंद फार काळ मिळायचा नव्हता. गणू विचार करत करत नेमका आमच्या फाटकासमोर आला आणि सरळ आत शिरला. बहुतेक मला त्यानी दुरूनच पाहिलं असावं.

'काय गणू? आज सुट्टी नाही का तुला?' मी म्हटलं.

'सुट्टी आहे, पण माझी झोप लवकर झाली. म्हणून उठलो मी.' गणूनी इतक्या सकाळी येण्याचा खुलासा केला.

'मग आता कुठे निघालायस?' मी विचारलं.

'कुठे नाही. असाच विचार करत फिरत होतो. इतक्यात् तुम्ही दिसलात म्हणून आलो.' गणूचा आणखी खुलासा.

गणू लहान असला तरी अनुभवानी तो बराच शहाणा झालाय्. मोठ्या माणसांना भल्या सकाळी अडचणीत टाकणारे प्रश्न एकदम विचारू नयेत हे त्यानी चांगलं ओळखलंय्. तो आता काय विचारणार हे मी अजमावत होतो. इतक्यात गणू म्हणाला,

'काका, एक विचारू का?'

'विचार ना' मी म्हटलं.

'काका, पृथ्वी चेंडूसारखी गोल आहे ना?'

'हो'

'तिचा परिघ किती असेल हो?'

'ह्या प्रश्नाचं उत्तर मला नक्की ठाऊक नव्हतं. पण त्रिज्या ठाऊक असली तर परिघ काढता येईल. इतकं मला माहिती होतं. पृथ्वीची त्रिज्या ४००० मैल आहे हे अंधुकसं आठवत होतं.

'गणू पृथ्वीची त्रिज्या किती आहे ते ठाऊक आहे का तुला?'

हो. आमच्या बाईंनी सांगितलय् की पृथ्वीची त्रिज्या ६००० किलोमीटर

आहे म्हणून.' गणू म्हणाला.

'अरे हो, आता मैलाचं माप गेलं, नाही का! ठीक आहे. त्रिज्या ६००० कि.मी. म्हणजे व्यास किती?'

'१२००० कि.मी.' गणूनी तत्काळ उत्तर दिलं.

'मग आता परिघ काढायला त्याला $\frac{२२}{७}$ नी गुणायचं' मी म्हटलं.

'हो, हे सूत्र बाईंनी सांगितलंय् आम्हाला. $\frac{२२}{७}$ × व्यास = परिघ' गणू म्हणाला आणि गणित करू लागला.

'काका, १२००० × २२ म्हणजे किती येतील हो' इति गणू

'हे बघ, गणू एवढे मोठे आकडे कशाला घ्यायला हवेत? २२ भागिले ७ म्हणजे ३$\frac{१}{७}$ येतात. म्हणजे जवळ जवळ ३ येतात ना? मग १२००० ला ३ नी गुणून टाक. म्हणजे परिघ किती ते पटकन् कळेल; नाही का?' गणूला ही युक्ती पटली. त्यांनी गुणाकार करून उत्तर काढलं. ३६००० किमी.

'पृथ्वीचा परिघ ३६००० कि.मी. आहे.' गणूनी म्हटलं. 'हो, जवळ जवळ ३६००० कि.मी.! कारण आपण ३$\frac{१}{७}$ ऐवजी ३ नी गुणलंय्'.

माझा हा खुलासाही गणूला पटला. पण तरीही त्याचा चेहरा चिंताक्रांत झालेला बघून मी म्हटलं

'काय रे गणू, झालं ना गणित तुझं? मग आता काय विचार करतोयस्?'

'काका, गणित सुटलं. पण आता मला प्रश्न पडलाय् की पृथ्वीची त्रिज्या ६००० कि.मी. आहे हे कसं काय समजलं असेल? एवढी मोठी त्रिज्या कशी मोजली असेल?'

गणूच्या ह्या शंकेचं उत्तर देणं मला शक्य नव्हतं. मी म्हटलं 'कुणास ठाऊक कसं काढलं ते.' मग गणू विचार करत करत बाहेर गेला. त्याची पावलं आपोआप भास्कराचार्यांच्या घराकडे वळलेली दिसली.

गणू भास्कराचार्यांच्या घरी पोचला तेव्हा ते त्यांच्या भव्य ग्रंथालयात वाचत बसले होते. गणूनी दारावर 'टक् टक्' केलं तेव्हा त्यांनी पुस्तक बंद केलं, चष्मा काढला आणि वर बघितलं. गणूला पाहून त्यांना आनंद झाला. त्याची चौकस वृत्ती त्यांना फार आवडत असे.

'काय गणू, इतक्या सकाळीच कसा काय आलास? आज बाईंनी अभ्यास दिला नाही वाटतं?' ते म्हणाले.

'दिला होता अभ्यास, तो कालच करून टाकला.' गणू म्हणाला,

'मग आज काय उद्योग काढलायस्? भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'काही नाही, असाच सहज आलोय्' गणू म्हणाला.

गणू 'सहज' किंवा 'उगीच' येत नाही. भास्कराचार्यांना ठाऊक होतं. तो काही तरी प्रश्न विचारायला आलाय् हे त्यांनी ओळखलं होतं. पण थोडा वेळ गणूला काहीतरी कामात गुंतवावं म्हणून ते गणूला म्हणाले.

'गणू काल मी पृथ्वीचा एक नवीन गोल आणलाय्, हा बघ.' असं म्हणून त्यांनी टेबलावर ठेवलेल्या एका खोक्यातून पृथ्वीचा मोठा गोल काढला. त्याची वायर विजेच्या बटणाला जोडून त्यांनी बटण दाबलं. त्याबरोबर गोलातला दिवा लागला आणि त्याच्यावरची गावं, रस्ते, समुद्र वगैरे भाग निरनिराळ्या रंगांमधे खुलून दिसायला लागले. ते पाहून गणू फारच खूष झाला.

'काका, मला पृथ्वीबद्दलच विचारायचं होतं.' तो म्हणाला.

'मग विचार ना?' भास्कराचार्य हसत म्हणाले.

'काका, पृथ्वीची त्रिज्या ६००० किमी आहे असे आमच्या बाईंनी सांगितलं. पण त्रिज्या कोणी मोजली आणि कशी मोजली तेच मला समजत नाहीये' गणू म्हणाला.

'पृथ्वीची त्रिज्या कुणी मोजली नाही गणू. ती गणिताचा उपयोग करून काढली' भास्कराचार्य म्हणाले.

'म्हणजे वर्तुळाच्या सूत्राचा उपयोग करूनच काढली असेल ना?' गणूनी विचारलं.

'अर्थातच वर्तुळाचं सूत्रच वापरलं. पण त्यासाठी जरूर ती माहिती आधी मिळवावी लागली' भास्कराचार्य एकेक गोष्ट सांगून गणूची उत्सुकता वाढवत होते.

'वर्तुळाचं सूत्र म्हणजे परिघाचंच ना? पृथ्वीचा परिघ ३६००० किमी. आहे. ते गणित आत्तांच रामकाकांनी मला दाखवलं.' गणू म्हणाला.

'बरोबर, त्रिज्या ठाऊक असली तर परिघ गणितानी काढता येतो. पण खरं म्हणजे शास्त्रज्ञांनी पृथ्वीचा परिघ आधी काढला आणि मग त्रिज्या किती ते काढलं'

भास्कराचार्य म्हणाले.

'पण परिघ तरी कसा काढला असेल? त्यासाठी काहीतरी मोजलंच असेल ना?' गणूनी शंका काढली.

'पृथ्वीचा परिघ किती हे काढणाऱ्या शास्त्रज्ञांचं नाव आहे इरॅटोस्थेनीस' भास्कराचार्य म्हणाले.

'आर्किमिडीज सारखं हे पण ग्रीक नाव आहे वाटतं?' गणूनी विचारलं.

'अगदी बरोबर! ह्या इरेटोस्थेनीसची गोष्टच मी तुला सांगतो' भास्कराचार्य म्हणाले.

'ग्रीकांचा सर्वश्रेष्ठ राजा शिकंदर तुला ठाऊक असेलच. त्याचं खरं नाव ॲलेक्झांडर असे होतं. त्यानी इजिप्त देश जिंकला तेव्हा नाइल नदीच्या काठी एक नवीन शहर वसवलं आणि त्याला 'ॲलेक्झांड्रिया' असे नाव दिलं. ह्या ॲलेक्झांड्रिया शहरात त्यानी एक विद्यापीठ स्थापन केलं आणि एक उत्कृष्ठ ग्रंथालयही स्थापन केलं. कालांतराने हे ग्रंथालय साऱ्या जगात प्रसिद्ध झालं. इरेटोस्थेनीस हा ग्रीक शास्त्रज्ञ ह्या ग्रंथालयाचा प्रमुख ग्रंथपाल होता.'

काका, ही तर फार जुनी गोष्ट असणार!' गणू म्हणाला.

'हो तर! ॲलेक्झांड्रिया शहराची स्थापना शिकंदरानी इ.स. पूर्वी ३३४ सालात केली. म्हणजे आत्तापासून सुमारे २३०० वर्षांपूर्वी. इरेटोस्थेनीस तिथे होता तो काळ इ.स. पूर्वी २५० वर्षे. म्हणजे आत्तांपासून सुमारे २२०० वर्षांपूर्वी! इरेटोस्थेनीस हा जसा ग्रंथपाल होता तसाच तो शास्त्रज्ञही होता. त्यामुळेच त्याच्या कानावर आलेल्या माहितीचा नेमका अर्थ त्याला लावता आला आणि पृथ्वीच्या परिघाचं गणितही करता आलं.'

'कसली माहिती समजली होती त्याला?' गणूनी अधीरपणानी विचारलं.

'ॲलेक्झांड्रिया शहराच्या बरोबर दक्षिणेला सायनी किंवा आस्वान नावाचं गाव आहे. आता त्या ठिकाणी एक प्रचंड जगप्रसिद्ध धरण आहे. ह्या गावाबद्दल इरेटोस्थेनीसला दोन गोष्टी ठाऊक होत्या. एक म्हणजे ॲलेक्झांड्रियापासून सायनी गावाला जाणारा रस्ता बरोबर दक्षिणोत्तर आहे आणि त्या दोन गावातलं अंतर सुमारे ४००० स्टेडिआ इतकं आहे.

'हे स्टेडिया हे माप केवढं आहे? म्हणजे मीटर किंवा किलोमीटर किती होतील त्याचे?' गणूनी विचारलं.

'स्टेडिअम हे ग्रीक लोकांचं अंतर मोजण्याचं माप होतं. १ स्टेडिअम म्हणजे सुमारे १८० मीटर अंतर. म्हणजे ४००० स्टेडिआ हे अंतर जवळ जवळ ७२० किलोमीटर येतं भास्कराचार्यांनी खुलासा केला.

'आणखी कोणती माहिती मिळाली होती इरेटोस्थेनीसला? गणूची पृच्छा.

'गणू, ते आपण आता ह्या पृथ्वीच्या नकाशावरच पाहू. ह्या नकाशावर विषुववृत्त, कर्कवृत्त, मकरवृत्त अशा रेषा काढलेल्या असतात.' भास्कराचार्य म्हणाले.

'हो, माहितीये मला. विषुववृत्त अगदी पृथ्वीच्या मधोमध असतं ना?' गणू म्हणाला. 'आणि कर्कवृत्त कुठे असतं?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'कर्कवृत्त विषुववृत्ताच्या वर म्हणजे उत्तरेला आणि मकरवृत्त दक्षिणेला असतं. हे बघा कर्कवृत्त' असे म्हणून गणूनी नकाशावर कर्कवृत्ताची आडवी रेषा भास्कराचार्यांना दाखवली.

'शाबास गणू. आता हे बघ हे अ‍ॅलेक्झांड्रिया गाव इथे दिसतंय. त्याच्या दक्षिणेला अगदी बरोबर कर्कवृत्तावरच हे आस्वान, म्हणजे जुनं सायनी गाव आहे.' भास्कराचार्यांनी ते गाव गणूला दाखवलं.

'हे बघ, हे दोन गावातलं अंतर नकाशाच्या स्केलप्रमाणे जवळ जवळ ७२० कि.मी. आहे. असं ह्या गोलावर ५० वेळा मोजलं की पुरा परिघ आपल्याला मिळतो. पण इरेटोस्थेनीसच्या वेळी पृथ्वीचा अगदी साधा नकाशासुद्धा नव्हता, मग असला गोल कुठून असणार? आणि कर्कवृत्त तरी कुठून असणार? भास्कराचार्य गणूला म्हणाले.

'मग त्यानी काय केलं?' गणूनी विचारलं.

'त्याला सायनी गावाबद्दल आणखी एक गोष्ट ठाऊक होती. ह्या सायनी गावात एक अरूंद आणि खोल विहीर होती. एका विशिष्ट दिवशी दुपारी बरोबर मध्याह्नी म्हणजे आपल्या घड्याळाप्रमाणे १२ वाजता सूर्याचं प्रतिबिंब नेमकं विहिरीत दिसतं हे लोकांकडून इरेटोस्थेनीसला समजलं होतं. इतर लोकांना हा एक चमत्कारच वाटायचा. पण त्याचा खरा अर्थ इरेटोस्थेनीसला समजला होता. सूर्याचं प्रतिबिंब खोल आणि अरुंद विहिरीत दिसतंय् ह्याचा अर्थ त्यावेळी सूर्यकिरण पृथ्वीच्या पृष्ठभागाशी बरोबर काटकोन करत असणार हे इरेटोस्थेनीसच्या लक्षात आलं.' भास्कराचार्य बोलता बोलता थांबले आणि त्यांनी कागदावर एक चित्र काढलं. त्या चित्रात खोल विहीर दाखवली होती आणि सूर्य बरोबर विहिरीवर असताना सूर्यकिरण जमिनीशी काटकोन कसा करतात ते दाखवलं होतं. (आकृती १ अ पहा).

'अ‍ॅलेक्झांड्रिया शहर सायनीच्या उत्तरेला आहे. म्हणजे त्याच दिवशी १२ वाजता सूर्य अ‍ॅलेक्झांड्रिया शहराच्या दक्षिणेला असला पाहिजे, आणि

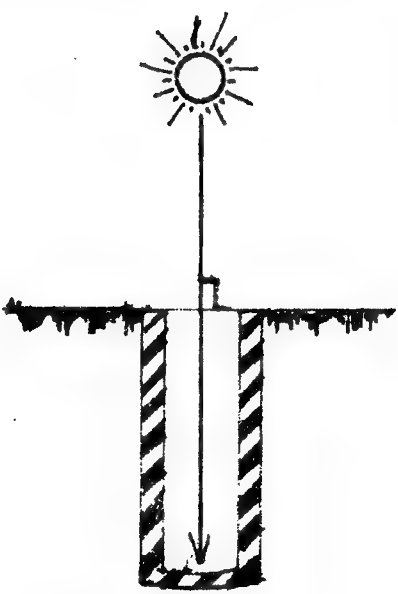
कोणत्याही उभ्या वस्तूची सावली दुपारी १२ वाजता जराशी उत्तरेला पडली पाहिजे हे पण इरेटोस्थेनीसच्या लक्षात आलं' भास्कराचार्य पुढे सांगू लागले.

'ह्या सावलीचं महत्व केवढं मोठं आहे हे इरेटोस्थेनीसच्या बरोबर लक्षात आलं होतं. कारण पृथ्वी गोल आहे आणि सूर्यकिरण जमिनीशी काटकोन करतात किंवा एखादा स्तंभ जमिनीशी काटकोन करून उभा करतात ह्या गोष्टींचा एकमेकांशी काय संबंध आहे. हे इरेटोस्थेनीसच्या लक्षात आलं होतं.

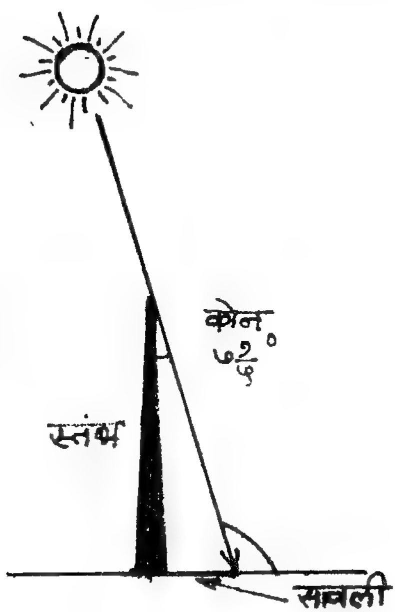
'मला काही हे समजलं नाही' गणू म्हणाला.

'हे बघ मी तुला प्रत्यक्षच त्याचा अर्थ समजावून देतो, भास्कराचार्य म्हणाले. त्यांनी घरातून एक लिंबू आणलं आणि दोन लांब सुया आणल्या. लिंबू बरोबर मधोमध कापून त्यांनी त्याचे दोन भाग केले. त्या लिंबाचं केंद्र कुठे आहे ते त्यांनी गणूला दाखवलं.

'गणू, हे लिंबू म्हणजे आपली पृथ्वी आहे असं समज. लिंबू म्हणजे पृथ्वी कापून आपण पृथ्वीच्या जमिनीखालच्या भागात काय चालतं ते आता पहाणार



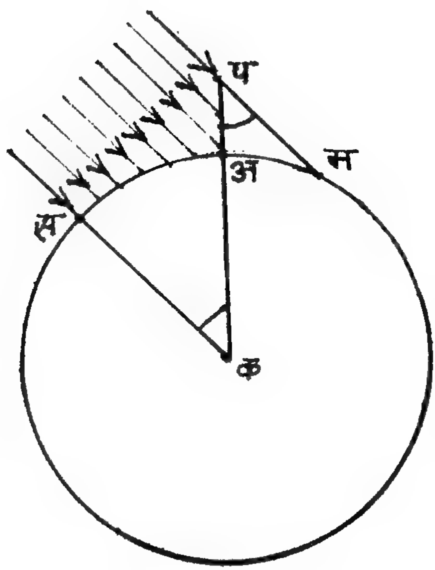
(आकृती १ अ)



(आकृती १ ब)

आहोत असं समज. पृथ्वीचं केंद्र कुठे आहे ते आपण पाहिलंच आहे. आता ह्या इथे सायनी गाव आणि त्याच्या थोडं उत्तरेकडे हे ॲलेक्झांड्रिया गाव आहे असं समज.' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी लिंबाच्या कडेवर दोन खुणा केल्या. नंतर जवळची एक सुई सायनी गावाच्या खुणेवर धरून तिचं दुसरं टोक लिंबाच्या केंद्राशी जुळवलं.

'हे बघ गणू, ही सुई म्हणजे पृष्ठभागावरचा बिंदू आणि ह्या गोलाचं म्हणजे पृथ्वीचं केंद्र ह्यातून जाणारी एक रेषा आहे असं समज. अशी रेषा नेहमी गोलाच्या पृष्ठभागाशी काटकोन करते. आता सायनी गावातल्या विहिरीत पडणारे किरण जमिनीशी काटकोन करतात ह्याचा अर्थ असा होते की त्यातल्या एका किरणाची रेषा जर आपण कल्पनेने जमिनीत खोल वाढवली तर पृथ्वीच्या केंद्रातून जाईल. आता ही दुसरी सुई आपण ॲलेक्झांड्रिया गावातल्या स्तंभाची रेषा आहे असे समजू. ती रेषाही पृथ्वीच्या केंद्रातूनच जाईल. हे बघ मी त्या दोन्ही रेषांचं चित्र काढून दाखवतो; असं म्हणून त्यांनी गणूला एक चित्र काढून दाखवलं. (आकृती २ पहा)



आकृती २

'गणू, ह्या चित्रात जे तीन बिंदू दिसताहेत त्यांना नावं दे पाहू' भास्कराचार्य म्हणाले. गणूनी पृथ्वीच्या केंद्राला 'क' नाव दिले. तसंच सायनी गावाच्या बिंदूला 'स' आणि ॲलेक्झांड्रिया गावाच्या बिंदूला 'अ' नाव दिले. गणूची हुशारी पाहून भास्कराचार्य खूष झाले.

'हे पहा गणू, आता आपण त्या दिवशी दुपारी १२ वाजता सूर्यकिरण कसे पडत होते ते आकृतीत दाखवू. सायनी गावात ते पृथ्वीशी काटकोन करून म्हणजे 'सक' दिशेने पडत होते. आणि त्याच वेळी ॲलेक्झांड्रियामधे ते कसे पडत असतील सांग पाहू!' भास्कराचार्य म्हणाले.

'सूर्यकिरण एकमेकांना समांतर असतात एवढं मला माहीत आहे. म्हणजे सक रेषेला समांतर रेषा काढली पाहिजे.'

'बरोबर आहे. म्हणजे आपण काढलेल्या सुईच्या वरच्या टोकातून 'सक' रेषेला समांतर रेषा काढू या. हं ही बघ 'पम' रेषा 'सक' ला समांतर काढली. आता ह्या आकृतीत तुला कोणते कोन दिसतायत्?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

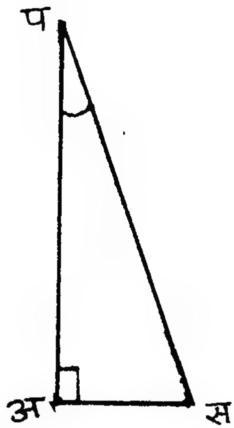
थोडा वेळ आकृतीकडे पाहून गणू म्हणाला.

'हं, दिसले, $\angle$सकअ आणि $\angle$अपम दिसताहेत मला' गणूनी खुणा करून ते कोन दाखवले.

'आणि ते कोन सारख्याच मापाचे असतील. कारण सक आणि पम रेषा समांतर आहेत.' गणू आनंदानी म्हणाला.

'बरोबर, नेमकी हीच गोष्ट इरेटोस्थेनीसच्या लक्षात आली. म्हणजे जर आपण अपम चं माप काढलं तर $\angle$सकअचं पण तेच माप असलं पाहिजे हे त्याला कळलं. मग $\angle$अपम चं माप काढण्यासाठी त्यांनी एक सोपी युक्ती केली. ॲलेक्झांड्रिया गावातील सायनी गावाच्या वाटेवर असलेल्या एका स्तंभाची उंची त्यांनी मोजली. ज्या दिवशी सायनी गावातील विहिरीत सूर्याचं प्रतिबिंब पडतं त्याच दिवशी दुपारी बरोबर १२ वाजता इरेटोस्थेनीसनी त्या स्तंभाच्या सावलीची लांबी मोजली. (आकृती १ ब पहा) मग ठराविक प्रमाण घेऊन त्यांनी स्तंभ आणि त्याला काटकोन करून पडलेली सावली ह्यांचं चित्र काढलं. हे बघ.' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी कागदावर एक त्रिकोण काढून दाखवला. (आकृती ३ पहा)

'आपल्या पृथ्वीच्या आकृतीतला 'पअम' त्रिकोण तो हाच! आता $\angle$अपमचं माप मोजणं सोप आहे नाही का?'



आकृती ३

गणूनी नुसती मान हलवून होकार दिला.

'इरेटोस्थेनीसनी तो कोन मोजला. तो $७\frac{१}{५}^{\circ}$ म्हणजे $\frac{३६}{५}^{\circ}$ आला. आता आपली आधीची आकृती बघ. त्यात $\angle$सकअचं माप $\frac{३६}{५}^{\circ}$ झालं आणि 'सअ' हे पृथ्वीच्या परिघावरचं अंतर सुमारे ७२०कि.मी. आहे हे त्याला ठाऊक होतंच. मग इरेटोस्थेनीसनी वर्तुळाचा आणखी एक गुणधर्म वापरला. पृथ्वीचा परिघ आणि 'सअ' अंतर ह्यांचं गुणोत्तर $\frac{३६०}{\left(\frac{३६}{५}\right)}$ इतकं असलं पाहिजे हे त्याला भूमितीच्या अभ्यासावरून ठाऊक होतं. त्याच सूत्राचा उपयोग त्यांनी केला. हे बघ ते सूत्र.

$$\frac{\text{पृथ्वीचा परिघ}}{७२०} = \frac{३६०}{\left(\frac{३६}{५}\right)} = ५०$$

$$\therefore \text{पृथ्वीचा परिघ} = ५० \times ७२०$$
$$= ३६,००० \text{ कि.मी.}$$

आपण काढलेल्या उत्तराइतकंच हे पण उत्तर आलेलं पाहून गणू अतिशय खूष झाला.

'काका, हा इरेटोस्थेनीस भयंकर हुषार असला पाहिजे नाही का?' तो आश्चर्यानी भारावून म्हणाला.

'हो तर! अत्यंत साध्या गोष्टींचा आणि गणिताचा योग्य उपयोग त्याला सुचला ही त्याची हुषारीच होती. इरेटोस्थेनीसनी पृथ्वीचा परिघ काढल्यानंतर त्यावरून पृथ्वीची त्रिज्या काढणं सोप होतं. कारण आर्किमिडीजनी परिघ = २ × $\frac{२२}{७}$ × त्रिज्या हे सूत्र आधीच शोधून काढलं होतं ना!'

इरेटोस्थेनीसच्या गोष्टीनी गणू अगदी भारावून गेला होता. तो टेबलावरच्या पृथ्वीच्या गोलावरील ॲलेक्झांड्रिया गावाच्या ठिपक्याकडे बघत म्हणाला,

'काका, आमचं सहावीतलं गणितसुद्धा खूप महत्वाचं आहे ना?'

'हो तर, ते सोपं आहे पण महत्वाचंही आहे, मात्र त्याचा उपयोग कुठे नी कसा करायचा हे आपल्याला सुचलं पाहिजे.'

'गणूनी होकारार्थी मान हलवली आणि स्वत:शीच विचार करत तो हळू हळू घरी गेला. भास्कराचार्य हंसून त्याच्याकडे बघत होते.

४

'भास्कराचार्यांकडचा पृथ्वीचा गोल पाहिल्यापासून गणूला तो गोल पुन्हा पुन्हा पहाण्याचा नादच लागला होता. तो गोल हळू हळू फिरवून त्याच्यावरची गावं, नद्या, डोंगर, समुद्र, त्यातली बेटं ह्यांची नावं बघायची, उत्तरेकडे कोण, दक्षिणेकडे कोण, नेमकी विषुववृत्तावर कोणती गावं येतात असल्या प्रश्नाची उत्तरं शोधण्याचा त्याला जणू काही छंदच जडला होता. त्याचा एक चांगला परिणाम झाला की भूगोलाच्या पेपरात त्याला खूप गुण मिळाले. भूगोलाच्या बाईंनी वर्गात गणूचं कौतुक केलं. ते मात्र त्यांच्या अंगाशी आलं. कारण गणू त्यांना एकसारखे निरनिराळे प्रश्न विचारू लागला. अक्षांश म्हणजे काय, रेखांश म्हणजे काय, इत्यादि प्रश्नांची उत्तरं त्यांनी कशीबशी दिली. पण एकदा गणूनी विचारलं 'बाई, एखाद्या गावाचे अक्षांश किती हे कसं काढायचं?'

'नकाशा बघायचा. त्यात अक्षांशांच्या आडव्या रेघा असतात. दोन रेघांच्या मधे आपलं गावं असलं तर दोन रेघांमधल्या अंतराचे सारखे भाग पाडायचे. म्हणजे त्या गावाचे अक्षांश समजतील.' बाईंनी म्हटलं.

'पण बाई, आपलं गाव नकाशात दिलेलंच नसलं तर काय करायचं?' गणूनी परत शंका काढली. ह्या प्रश्नाचं उत्तर बाईंना ठाऊक नव्हतं.

'गणू, आतां मला नाही सांगता येत. मी माहिती मिळवून मग सांगेन उत्तर' बाईंनी म्हटलं. त्यांनी प्रश्न उडवून लावला नाही हे गणूला आवडलं. पण बाई उत्तर सांगेपर्यंत त्याला धीर नव्हता. शाळा सुटल्यावर तो भास्कराचार्यांकडे हजर झाला. गणू आला की भास्कराचार्य नेहमी त्याच्या अभ्यासाची चौकशी करत असत.

'काय गणू' आज शाळेत काय शिकवलं तुम्हाला? त्यांनी विचारलं

'आज मी बाईंना अक्षांशाचा प्रश्न विचारला. पण त्यांना उत्तर आलं नाही' गणू म्हणाला.

'काय प्रश्न होता तुझा?' भास्कराचार्यांनी विचारले.

'मी विचारलं की एखादं गाव नकाशात दाखवलं नसेल, तर त्या गावाचे अक्षांश कसे काढतात?' गणू म्हणाला.

'हं, तुझा प्रश्न तसा अडचणीचाच आहे. पण उत्तर काही फार कठीण नाही. तिथे पुन्हा कोन मोजण्याचंच काम करायचंय्'

'इथे कसला कोन मोजायचा काका?' गणूनी विचारलं.

'सांगतो सगळं, पण त्याच्या आधी तुला दोन गोष्टी तुला माहिती हव्यात पहिली गोष्ट म्हणजे आकाशात धृवतारा कुठे आहे ते माहिती असायला हवं.'

'मला येतो ओळखता धृव तारा' गणू मध्येच म्हणाला

'सांग पाहू कसा ओळखायचा ते' भास्कराचार्यांनी म्हटलं.

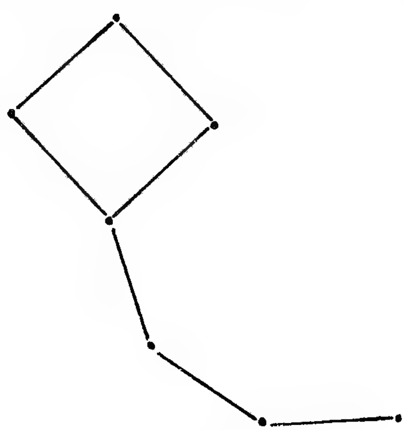
'आधी उत्तर दिशेकडे तोंड करायचं'

'पण उत्तर दिशा कशी ओळखायची?'

'पूर्व दिशा किंवा पश्चिम दिशा आपल्याला दिवसा कळते. त्यावरून उत्तर दिशा ओळखता येते.' गणू म्हणाला.

'बरं मग उत्तरेकडे तोंड केल्यावर ध्रुव तारा कसा ओळखायचा?' भास्कराचार्यांनी प्रश्न केला.

'आकाशात सप्तर्षींचा पतंगासारखा आकार दिसतो. त्याच्या चौकोनाच्या एका बाजूची रेषा ध्रुवताऱ्यातून जाते. ते आमच्या पुस्तकात दाखवलं आहे.' गणूनी लगेच ती आकृती काढून दाखवली. (आकृती १ पाहा)



(आकृती १)

'वा, छान! ध्रुव तारा तुला ओळखता येईल तर! बरं आता क्षितिज म्हणजे काय ते सांगता येईल का तुला?'

'हो. आपण जमिनीवर उभे राहिलो की आकाश जिथे जमिनीला टेकलेलं दिसतं ते क्षितिज. ते गोल दिसतं सगळीकडे' गणू म्हणाला.

'शाबास! क्षितिज म्हणजे काय हे पण तुला ठाऊक आहे की. मग आपलं काम अगदी सोपं झालं. क्षितिजाच्या कडेपासून ध्रुव तारा किती वर दिसतो, म्हणजे तो पाहायला क्षितिजापासून वर किती अंशाचा कोन करावा लागतो तो कोन मोजला की तेवढे आपल्या ठिकाणाचे अक्षांश असतात' भास्कराचार्य म्हणाले.

'काका, ध्रुव ताऱ्याचा कोन कसा मोजायचा ते कळलं. पण त्याचा अक्षांशाशी कसा काय संबंध येतो ते नाही कळलं' गणू म्हणाला.

'हे बघ गणू, आधी अक्षांश कशाला म्हणतात ते आपण पाहू'. असे म्हणून त्यांनी पृथ्वीचा गोल घेतला.

'हे बघ, पृथ्वीच्या पाठीवर हे एक गाव आहे. ह्या गावातून पृथ्वीच्या केंद्रापर्यंत त्रिज्या काढली आहे असं समज. तसंच पृथ्वीचा उत्तर ध्रुव आणि हे गाव एका वर्तुळावर आहेत हे लक्षात घे.' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी पृथ्वीच्या गोलावरचं ते वर्तुळ गणूला दाखवलं.

'आता ह्या वर्तुळाचा आडवा व्यास आणि गावातून काढलेली त्रिज्या ह्यांच्यामध्ये कोन होतो. त्या कोनालाच त्या गावाचे अक्षांश म्हणतात' गणूला आपलं म्हणणं समजलं की नाही हे पाहण्यासाठी ते गणूकडे बारकाईनी बघत होते. पण गणूला ते नीट कळलेलं नव्हतं, तो विचारमग्न होऊन गप्प बसला होता.

'थांब हं. मी तुला नीट कळावं म्हणून प्रत्यक्ष अक्षांशच दाखवतो.' असं म्हणून भास्कराचार्य आत गेले. त्यांनी एक लिंबू आणलं.

'गणू, ही आपली पृथ्वी.' असं म्हणून त्यांनी लिंबावर सुईनी एक भोक पाडलं.

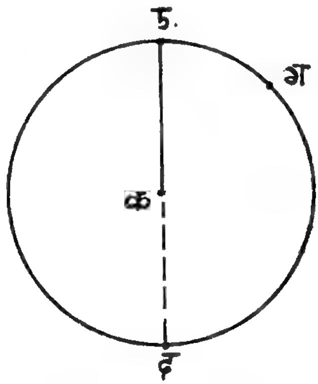
'हं, हे भोक म्हणजेच पृथ्वीवरचं आपलं गाव आणि उत्तरध्रुवाची ही खूण. आता उत्तरध्रुव आणि हे गाव ह्यातून जाणारं वर्तुळ कसं दाखवायचं ते सांग पाहू!' भास्कराचार्य म्हणाले. आता गणूच्या डोक्यात थोडा प्रकाश पडू लागला होता. तो म्हणाला,

'त्या दोन खुणांवर लिंबू मधोमध कापा. म्हणजे ते वर्तुळ आपल्याला मिळेल.'

'बरोबर. हे बघ लिंबू कापलं तसं. आता पृथ्वीचं केंद्र कुठे आहे दाखव पाहू' भास्कराचार्य गणू काय करतो हे कुतूहलाने पाहू लागले.

'हे पृथ्वीचं केंद्र' असे म्हणून गणूनी बरोबर लिंबाच्या केंद्रावर खूण केली.

'हं, आता उत्तर ध्रुव आणि पृथ्वीचं केंद्र ह्यांना जोडणारी त्रिज्या काढून दाखव पाहू' भास्कराचार्य आपल्या गणिताची एकेक पायरी गणूकडून करून घेत होते. गणूनी सुरी घेतली, उत्तर ध्रुव आणि पृथ्वीचं केंद्र ह्या दोन बिंदूंवर नेमकी सुरी ठेवून त्यानी ती हळूच दाबली. लिंबाला मधोमध लहानशी चीर पडली आणि त्रिज्या दिसू लागली. (आकृती २ पाहा).

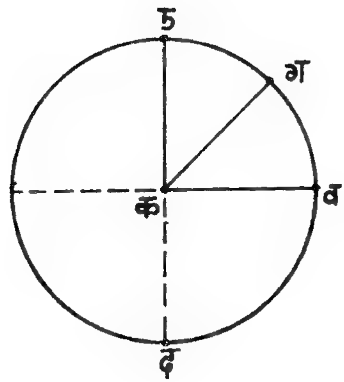


आकृती २

'शाब्बास! आता ह्या त्रिज्येला काटकोन करणारी त्रिज्या काढ पाहू' भास्कराचार्य म्हणाले. गणूनी पुन्हा सुरी घेऊन ती पहिल्या रेषेला काटकोन करून आडवी ठेवली आणि सुरी हळूच दाबून पहिल्याप्रमाणे एक रेघ काढली.

'हं. आता पृथ्वीचं केंद्र आणि आपलं गाव ह्यांना जोडणारी त्रिज्या काढ पाहू' भास्कराचार्य म्हणाले. गणूनी ती पण त्रिज्या सुरीनी काढली. आता लिंबावर एक आकृती दिसू लागली. भास्कराचार्यांनी ती आकृती कागदावर काढली. (आकृती ३ पाहा) त्यांनी निरनिराळ्या बिंदूंना नावं दिली.

'हे बघ गणू, क हे पृथ्वीचं केंद्र, ग हे आपलं गाव, कग ही गावातून



आकृती ३

जाणारी त्रिज्या आणि कव ही केंद्रातून जाणारी आडवी त्रिज्या आता कोन गकव हा कोन झाला.

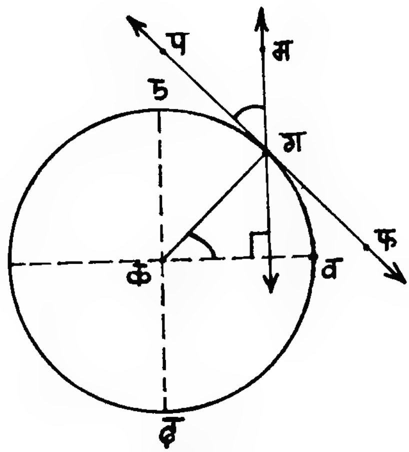
ह्या कोनाचं जे माप येईल तेवढे ग गावाचे अक्षाशं समजलं का?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'हो अक्षांश म्हणजे काय ते कळलं आता.' गणू म्हणाला.

'आता ध्रुव ताऱ्याशी त्याचा संबंध कसा येतो ते सांगतो तुला. तुला थोडीशी भूमिती येते तेवढी पुरेल मी काय सांगतो ते समजायला. आता आधी आपल्या आकृतीमधे क्षितिज कसं दाखवायचं ते तुला सांगतो' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी एक पोस्टकार्ड घेतलं. ते ग ह्या गावावर लिंबाच्या पृष्ठभागाला टेकवून ठेवलं. मग ते गणूला म्हणाले,

'हे पोस्टकार्ड म्हणजे एक सपाट पृष्ठभाग आहे.हा पृष्ठभाग म्हणजे आपल्या गावाची क्षितिजाची पातळी आहे असं समज. आपल्या गावातून काढलेली त्रिज्या ह्या क्षितिज-पातळीला काटकोन करते. आता हे क्षितिज आपल्या आकृतीत कसं दिसेल ते पहा.' असं म्हणून त्यांनी कागदावरच्या आकृतीमधे 'कग' त्रिज्येला काटकोन करणारी पफ रेषा काढली. (आकृती ४ पाहा)

'ही पफ रेषा म्हणजे आपल्या पोस्टकार्डाची कडा असं समज. आता ह्या आकृतीत उत्तर दिशा दाखव पाहू' गणूनी उत्तर दिशा बरोबर दाखवली.



आकृती ४

‘हं आता ग गावातून उत्तर ध्रुव कुठे दिसेल ते दाखव पाहू’ भास्कराचार्य म्हणाले. मग गणूनी ग बिंदूतून उत्तर दक्षिण दिशेने जाणारी गम रेषा काढली.

‘शाब्बास! आता ग गावाच्या क्षितिजाशी गम रेषा जेवढा कोन करील, तेवढे अंश उंचीवर ध्रुवतारा आपल्याला दिसेल. समजलं का हे तुला?’ भास्कराचार्यांनी हा मुद्दा गणूला समजला की नाही ह्याची खात्री करून घेतली. आपण ताऱ्याकडे बघताना क्षितिजापासून तो किती अंशाच्या कोनावर आहे हेच नेहमी पहात असतो हे त्यांनी गणूला नीट समजावून दिलं.

‘आता कोन पगम हा कोन आणि कोन गकव हा कोन सारख्याच मापाचे आहेत हे तुला सहज समजेल आकृती वरून’ भास्कराचार्य म्हणाले. गणूनी आकृती नीट पाह्यली.

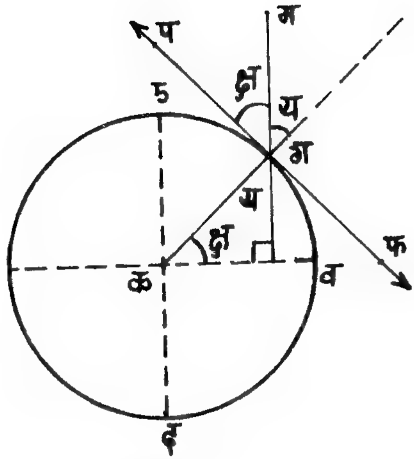
‘हं समजलं मला’ असं म्हणून त्यांनी आकृतीत निरनिराळ्या कोनांची मापं दाखवली. (आकृती ५ पाहा) ते पाहून भास्कराचार्यांनी गणूची पाठ थोपटली.

‘शाबास गणू! आता ध्रुवताऱ्यावरून एखाद्या ठिकाणचे अक्षांश कसे काढायचे हे समजलं तुला’ भास्कराचार्य म्हणाले.

‘पण अजून एक शंका आहे मला’ गणू म्हणाला.

‘आता काय शंका आहे तुझी?’ भास्कराचार्यांनी कौतुकाने विचारलं.

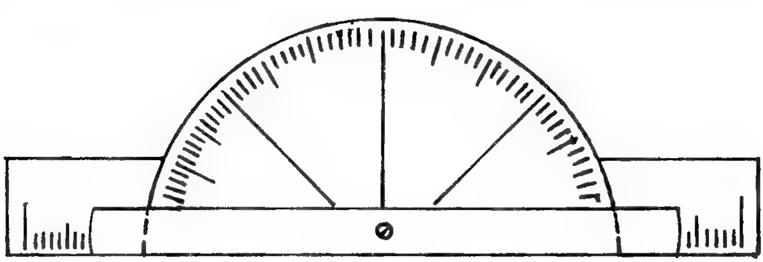
‘क्षितिजावर ध्रुवताऱ्याचा कोन किती आहे हे मोजायचं कसं?’ गणूनी विचारलं.



आकृती ५

'छान, अगदी मुळातलाच प्रश्न विचारलास. पण तो कोन मोजण्याचं काम अगदी सोपं आहे. हे बघ, मी त्याच्यासाठी अगदी सोपं उपकरण मुद्दाम करून ठेवलं आहे' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी गणूला ते उपकरण दाखवलं. एका पट्टीला त्यांनी एक साधा कोनमापक बसवला होता. कोनमापकाच्या मधोमध पट्टीच्या तळाशी एक उदबत्तीच्या खोक्याची नळी बसवली होती. (आकृती ६ पाहा)

'गणूनी नळीला डोळा लावला. मग नळी खिडकीतून दिसणाऱ्या झाडाच्या शेंड्याकडे वळवली. मग नळी तशीच ठेवून त्यानी कोन मापकावर किती कोन



आकृती ६

झाला ते पाह्यलं.

'हं, ह्यानी कोन मोजणं अगदी सोपं आहे' तो म्हणाला.

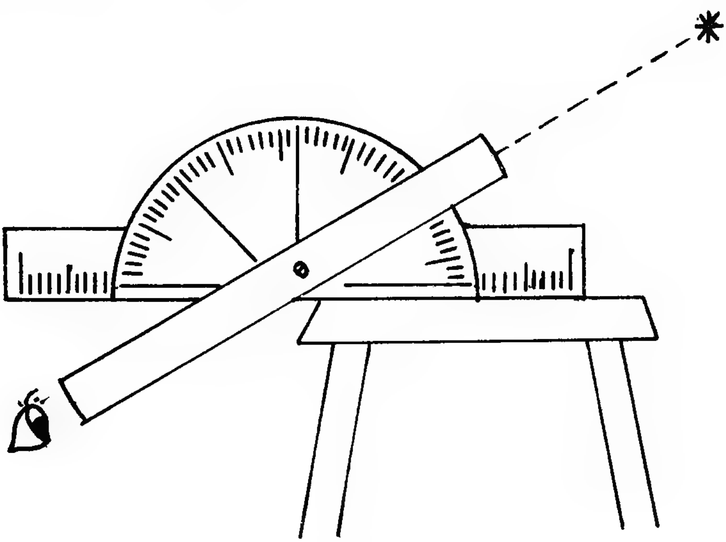
'सोपं असलं तरी ध्रुव ताऱ्याचा कोन मोजताना आणखी बरीच काळजी घ्यावी लागते.' भास्कराचार्य म्हणाले.

'मी सांगू काय काळजी घ्यावी लागेल ती?' गणूनी विचारलं.

'सांग'

'हे उपकरण कशावर तरी ठेवून कोन मोजावा लागेल. नाहीतर हात हलेल आणि कोन मोजताना चूक होईल' गणू म्हणाला.

'बरोबर आहे त्यासाठी हे उपकरण एखाद्या उंच स्टुलावर ठेवलं की झालं. पण गणू आणखी सुद्धा एक काळजी घ्यायला हवी. ज्या स्टुलावर आपण उपकरण ठेवणार, त्याची फळी क्षितिज-पातळीला बरोबर समांतर असायला हवी. म्हणजे आपली नळी सुरुवातीला क्षितिज-समांतर राहील आणि मग ध्रुव ताऱ्याचा कोन बरोबर मोजला जाईल' भास्कराचार्य म्हणाले. असं म्हणून त्यांनी उपकरण स्टुलावर कसं ठेवायचं आणि कोन कसा मोजायचा ते गणूला दाखवलं (आकृती ७ पाहा).



आकृती ७

'पण काका, स्टुलाची पातळी बरोबर आहे की नाही हे कसं ठरवायचं?' गणूनी शंका काढली.

'अरे ते अगदी सोपं आहे. सुताराजवळ एक स्पिरीट भरलेली नळी असते ती बघितली आहेस. ना तू?'

'हो, त्या नळीत एक बुडबुडा असतो, नळी हलवली की तो वर-खाली सरकतो' गणू म्हणाला.

'ती नळी स्टुलावर ठेवायची. बुडबुडा मधोमध येईपर्यंत स्टुलाची फळी वर-खाली करायची बुडबुडा मधोमध आला की फळी क्षितिज समांतर झाली असं समजायचं.' भास्कराचार्यांनी म्हटलं.

'पण काका, आपल्याकडे तशी नळी नसली तर?' गणूनी आणखी शंका काढली.

'अरे त्यात काय आहे? एका बाटलीत पाणी भरायचं. त्यात थोडी हवा राहू द्यायची. म्हणजे हवेचा बुडबुडा तयार होईल. नळीऐवजी ही बाटली वापरायची की झालं' भास्कराचार्यांनी गणूच्या शंकेचं निवारण केलं.

'पण काका, आणखी एक शंका आहे' गणू म्हणाला.

'आता काय बाबा काढलीएस् शंका?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'काका, ध्रुव तारा रात्रीच दिसणार आपल्याला. पण सकाळी अक्षांश काढायचे असले तर काय करायचं? गणू म्हणाला.

'शंका फार महत्वाची आहे गणू. पण तिचं उत्तर देणं सोपं नाहीए, नंतर केव्हातरी सांगेन तुला उत्तर' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी तो विषय थांबवला.

५

गणू उन्हाळ्याच्या सुटीत त्याच्या मामाकडे गेला होता. मामाचं गाव लहान होतं. आणि शहरी वस्तीपासून दूर जंगली दुर्गम भागात होतं. नोकरीनिमित्त गणूच्या मामाला तिथे जावं लागलं होतं. मामांना अर्थातच त्याचं दु:ख नव्हतं. त्यांचा स्वभाव धाडसी होता आणि जंगलातील आयुष्याची त्यांना आवडही होती. गणूसारख्या चळवळ्या आणि चौकस मुलाला भटकायला अक्षरश: रान मोकळं होतं. गणूच्या शंकांना मामा जमेल तशी उत्तरं देताना कंटाळत नव्हते. फक्त गणूच्या एका शंकेचं उत्तर त्यांना नीट देता आलं नव्हतं. त्यांच्या घरी दूरदर्शन संच होता, पण त्याच्यावर फक्त 'राष्ट्रीय' कार्यक्रम दिसत असत. इतर कार्यक्रम त्या संचावर दिसत नसत. असं का ते गणूच्या मामांना नक्की ठाऊक नव्हतं.

गणू घरी परत आल्यावर आमच्या घरी त्याच्या फेऱ्या सुरू झाल्या. सुटीतल्या गणूच्या कार्यक्रमाची मी चौकशी केली नि त्यानी सुटीत काय काय केलं त्याचं साग्रसंगीत वर्णन केलं.

'मग टी.व्ही. वर काय काय पाह्यलंस?' असं मी सहज विचारलं आणि गणूला अजून पर्यंत अडलेला प्रश्न त्यानी लगेच मला विचारला.

'काका, मामाच्या गावी टी.व्ही. वर फक्त राष्ट्रीय कार्यक्रम दिसतात. स्थानिक कार्यक्रम दिसत नाहीत. असं का?'

'अरे तुझ्या मामाचं गाव टी.व्ही. स्टुडिओपासून ६० किलोमीटरपेक्षा लांब असेल. म्हणून स्थानिक कार्यक्रम तिथे दिसत नसतील.'

'पण असं का?' गणू.

'अरे, टी.व्ही. स्टुडिओपासून ६० कि.मी. अंतरापर्यंतच तिथले कार्यक्रम दिसू शकतात!' मी म्हटलं.

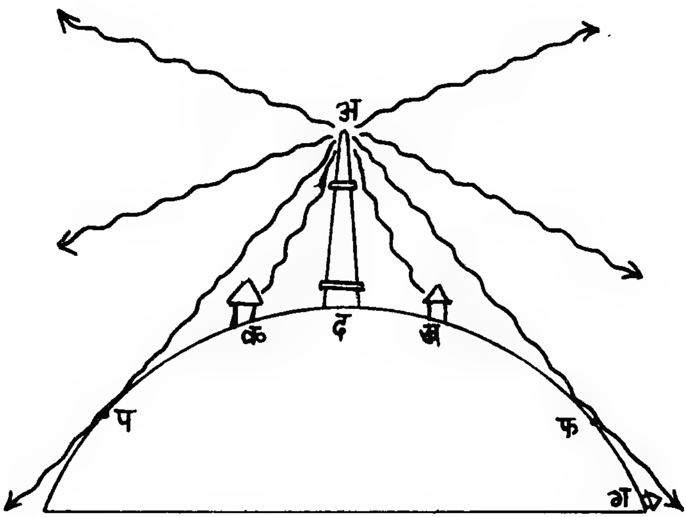
'रेडिओचे कार्यक्रम तर दोन-तीनशे किलोमीटर दूरही ऐकू येतात. आमच्या रेडिओवर मुंबई स्टेशनपण लागायचं. मग टी.व्ही. कार्यक्रम का नाही दिसत?' पुन्हा गणूचा प्रश्न. पण मला त्याचं उत्तर ठाऊक नव्हतं. मी म्हटलं.

'ते काही मला ठाऊक नाही. तू भास्करकाकांनाच विचार ते!'

भास्कराचार्यांकडे गणू गेला आणि त्यांना त्याने सर्व हकिगत सांगितली नि शेवटी आपला प्रश्नही विचारला.

'ह्या प्रश्नाचं उत्तर सहज देता येईल. त्यासाठी तुला थोडं गणित करावं लागेल गणू' ते म्हणाले.

'चालेल' गणू म्हणाला मग भास्कराचार्यांनी कागदावर एक आकृती काढली. (आकृती १ पाहा)



आकृती १

'हे बघ, हा पृथ्वीचा थोडासा भाग इथे दाखवू या.' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी पृथ्वीच्या गोलाचा थोडासा भाग चित्रात दाखवला. त्यावर त्यांनी द हा दूरदर्शन स्टुडिओचा उंच ॲण्टेना-स्तंभ दाखवला. क, ख, ग ह्या जागी तीन घरं दाखवली. ॲण्टेना मधून निघणाऱ्या टी.व्ही. लहरीपण निरनिराळ्या दिशांनी जाताना दाखवल्या.

'गणू, हा 'अ' म्हणजे टी.व्ही.चा ॲण्टेना. ह्यातून जाणाऱ्या टी.व्ही. लहरी अतिशय शक्तिमान् असतात. त्या अगदी सरळ रेषेत जातात. पृथ्वीचा पृष्ठभाग गोल असल्यामुळे त्या लहरी जमिनीवर फार दूरवर जाऊ शकत नाहीत. आता

इथे बघ 'अ' पासून निघालेल्या लहरी जमिनीवर फक्त प आणि फ ह्या बिंदूपर्यंतच पोहचू शकतात. फ च्या पलिकडचा 'ग' बिंदू त्या लहरींच्या कक्षेत येत नाही. आता मला सांग की ह्या चित्रात दाखविलेल्या कोणत्या ठिकाणी टी.व्ही.चा कार्यक्रम दिसू शकेल?' भास्कराचार्यांनी विचारलं. 'प, फ, क, ख ह्या ठिकाणी दिसेल' गणू म्हणाला.

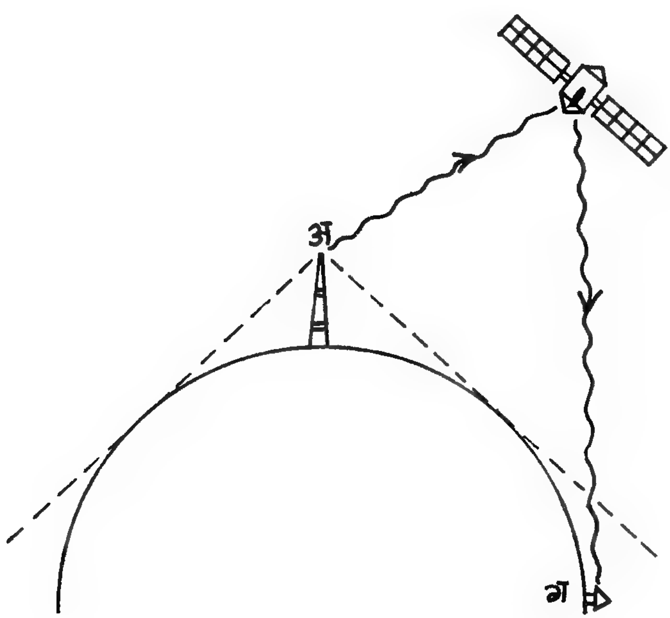
'आणि कुठे दिसणार नाही?' त्यांनी पुन्हा विचारलं.

'ग ह्या ठिकाणी दिसणार नाही. कारण टी.व्ही. लहरी त्या ठिकाणी पोहचतच नाहीत.' गणू म्हणाला.

'मग तुझ्या मामांच्या गावी स्थानिक कार्यक्रम का दिसत नाहीत ते समजलं का?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'हो, ते समजलं. पण 'राष्ट्रीय कार्यक्रम' कसे दिसतात ते सांगा ना' गणू म्हणाला.

'गणू तुम्ही कधी अंगणातून घरामधे आरशावरून उन्हाचा कवडसा पाडता



आकृती २

की नाही?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'हो पाडतो ना' गणू म्हणाला.

'मग तसाच आकाशात एक आरसा ठेवून टी.व्ही. लहरींचा कवडसा निरनिराळ्या ठिकाणी पाडता येतो.' भास्कराचार्य म्हणाले. गणूनी त्यावर थोडा विचार केला. मग तो हसू लागला.

'हं. कळलं मला. आकाशातला आरसा म्हणजे इन्सॅटसारखा उपग्रह होय ना? आणि त्याच्यावर पडलेल्या टी.व्ही. लहरी तो निरनिराळ्या ठिकाणी पाठवतो. मग ॲण्टेनातून जिथे लहरी सरळ जाऊ शकत नाहीत, म्हणजे चित्रातल्या 'ग' सारख्या ठिकाणी, तिथे उपग्रहावरून आलेल्या लहरी पोहचू शकतात' गणूनी उत्तर दिलं.

'चित्र काढून दाखवतोस का मला, तू काय म्हणतोस त्याचं? भास्कराचार्य म्हणाले. त्यावर गणूनी त्यांना चित्र काढून दाखवलं. (आकृती २ पाहा.)

गणूचं चित्र पाहून भास्कराचार्य फारच खूष झाले.

'काका हे मला समजलं. पण तुम्ही गणित करावं लागेल म्हणालात, ते कुठाय्?' गणू म्हणाला.

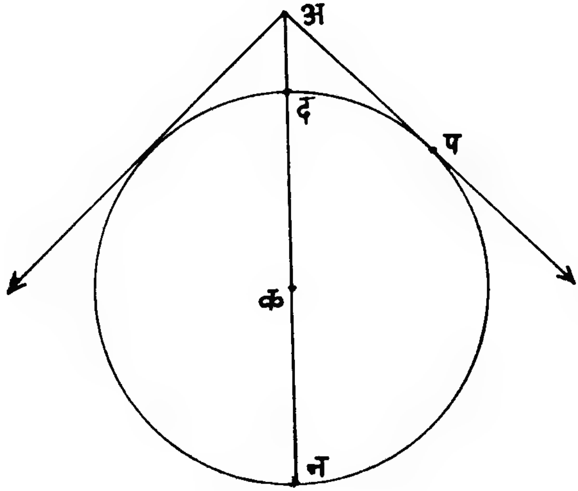
'गणित करायचं ते ॲण्टेना पासून प, फ ह्या ठिकाणांचं अंतर किती ते काढायला. आता आपण ते गणित करू या.' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी एक आकृती काढली (आकृती ३ पाहा).

'गणू, हे वर्तुळ म्हणजे पृथ्वी समज. 'दन' हा पृथ्वीचा व्यास आहे, अद ही ॲण्टेनाच्या स्तंभाची उंची आहे. अप ही टी.व्ही. लहर जमिनीला प इथे स्पर्श करून पुढे अंतराळात जाते. वर्तुळाला स्पर्श करणाऱ्या अशा रेषेला स्पर्शिका म्हणतात आता अशा स्थितीमध्ये अप अंतराचा वर्ग = अंतर अद × अंतर अन असं सूत्र वर्तुळाच्या एका प्रमेयाप्रमाणे मिळतं. आता आपण अद अंतर म्हणजे ॲण्टेना स्तंभाची उंची आणि दन अंतर म्हणजे पृथ्वीचा व्यास असं घेतलं की अप अंतर आपल्याला काढता येईल' एवढं सगळं गणित गणूला समजलं की नाही हे बघायला ते थांबले.

'गणू, समजतंय् का हे गणित?' त्यांनी गणूला विचारलं.

'हो, समजतंय्' तो म्हणाला.

'ठीक आहे. आता पृथ्वीचा व्यास आपण सुमारे १३,००० कि.मी. धरूया.' भास्कराचार्य म्हणाले.



आकृती ३

'आता (अंतर अप)^{२}= अंतर अद × अंतर अन हे गणित करू या. आकडे घालून केलं तर गणित असं येतं.

(अंतर अप)^{२}= ३०० मीटर × १३,००० कि.मी. इथे गणू एक लक्षात घे. आपण अन अंतर दन इतकं आहे असं समजून गणित करतोय्. पण तसं करणं बरोबर आहे का?' भास्कराचार्यांनी गणूची थोडी परीक्षा पाहण्यासाठीच हा प्रश्न केला. होता. पण गणू तसा पक्का विद्यार्थी होता. तो मुळीच गडबडला नाही.

'काही हरकत नाही तसं करायला. कारण १३,००० कि.मी. अंतरात आणखी ३०० मीटर मिळवले काय नि नाही मिळवले काय, उत्तरात फार फरक पडणार नाही' गणू म्हणाला.

'शाबास मग आता आपण गणित करू या. आधी आपण ३०० मी.चे किलोमीटर लिहू. तसंच शेवटच्या उत्तरातच फक्त मापं लिहू.

$$(\text{अंतर अप})^{२} = \frac{३००}{१०००} \times १३००$$

$$= ३९००$$

म्हणजे अंतर अप = $\sqrt{३९००}$

= $\sqrt{३९ \times १०}$

इतकं झाल्यावर भास्कराचार्यांनी ३९चं वर्गमूळ एका कोष्टकात बघितलं. ते आलं सुमारे ६.२५. मग ते म्हणाले 'हे बघ अप अंतर = ६.२५ × १० = ६२.५ कि.मी. म्हणजे साडे बासष्ट कि.मी. आलं.'

'हं म्हणूनच रामकाका म्हणत होते, टी.व्ही. कार्यक्रम ६० कि.मी. पर्यंतच दिसतो म्हणून.' गणू खुषीत येऊन म्हणाला. मग त्याला आणखी एक कल्पना सुचली.

'म्हणजे काका, टी.व्हीचा ॲण्टेना आणखी उंचावर ठेवला तर आणखी लांब अंतरापर्यंत कार्यक्रम दिसू शकेल' तो म्हणाला.

'अर्थातच' भास्कराचार्यांनी होकार दिला.

'हं, मग इन्सॅट उपग्रह तर आकाशात कितीतरी उंच आहे. त्याच्यावरून येणारे कार्यक्रम सगळ्या देशभर दिसतील की' गणूला हे टी.व्ही. कार्यक्रम दिसण्या न दिसण्याचं रहस्य उलगडल्यामुळे खूप आनंद झाला. शाळेतल्या साध्या गणितानी किती मोठे प्रश्न सुटतात ह्याचं त्याला नवल वाटलं. ते त्यानी भास्कराचार्यांना बोलून दाखवलं.

'अरे ह्या सूत्रानी आणखीही काही प्रश्नांची उत्तरं काढता येतात. सांगू तुला?' भास्कराचार्य म्हणाले.

'सांगा' गणू म्हणाला अशा कामात तो कधी कंटाळत नसे.

'समजा, एखादा मनुष्य मैदानात उभा आहे. त्याला किती दूरवरच्या गोष्टी दिसू शकतील? ह्या प्रश्नाचं उत्तर मगाचच्या सूत्रानी काढता येतं. आकृतीपण मगाचचीच. फक्त त्या आकृतीत अद ही ॲण्टेनाची उंची होती. तिथे आत माणसाची उंची घालायची. माणूस चांगला साडेसहा फूट उंच धरू. म्हणजे त्याची उंची २ मीटर होईल. आता सूत्र लिहून गणित कर पाहू' गणूनी असं सूत्र मांडलं

अप^{२} = २६

$\therefore$ अप = $\sqrt{२६}$

$\therefore$ अप = सुमारे ५ कि.मी. असं उत्तर गणूनी काढलं.

'म्हणजे मैदानात मनुष्य उभा असेल तर त्याला ५ कि.मी. दूरचं दिसू शकेल' गणू म्हणाला.

‘आणि सिंहगडाची उंची १,००० मीटर आहे. तिथून किती दूरचं दिसू शकेल?’ भास्कराचार्यांनी आणखी एक गणित घातलं. गणूनी ते गणित असं केलं.

$$\text{अप}^{२} = \frac{१०००}{१०००} \times १३०००$$

$$= १३०००$$

$$\therefore \text{अप} = \sqrt{१३०००}$$

हा आकडा भास्कराचार्यांनी कोष्टकातून त्याला काढून दिला. उत्तर आलं सुमारे ११४ कि.मी.

‘शिवाजी महाराजांना डोंगरी किल्ल्यांचं महत्त्व फार वाटायचं. त्याचं कारण समजलं का गणू आता?’

‘हो समजलं. उंचावरून खूप दूरची टेहळणी करता यायची म्हणून. पण काका, शिवाजी महाराजांना हे गणित येत होतं का?’ गणूनी प्रश्न केला.

‘शिवाजी महाराजांना कागदावरचं गणित येत नव्हतं. पण त्याचा अर्थ अनुभवानी त्यांना समजला होता’ भास्कराचार्य म्हणाले.

६

गणू भास्कराचार्यांकडे पोचला तेव्हा ते फळ्यावर काहीतरी गणित करत होते. त्यांच्या अभ्यासाच्या खोलीची एक भिंत फळ्याने अडवली होती नि उरलेल्या तीन भिंती छतापर्यंत पुस्तकांनी भरलेल्या. भास्कराचार्यांकडे केव्हांही गेलं तरी ते ह्या खोलीत अभ्यास करत असलेले दिसायचे. तसा त्यांना व्यायामाचा आणि बागकामाचाही छंद होता. पहाटे ही दोन्ही कामं बागेत करताना ते दिसायचे.

गणू आला तेव्हा सबंध फळा निरनिराळ्या गणितांनी भरून गेलेला त्याला दिसला. त्यातला बराचसा भाग त्याच्या ओळखीचा असावा. कारण काही गणितं तो वाचू शकत होता.

'काका, ही समीकरणं लिहिताय् ना तुम्ही?' त्यानी विचारलं.

'हो' मनातल्या मनात गणिताचा विचार करत भास्कराचार्य म्हणाले.

'आम्हाला पण बाईंनी समीकरणं शिकवलीयेत्' गणू म्हणाला.

'असे का, छान!'

'पण ती अगदी सोपी आहेत. तुम्ही करताय् तशी कठिण नाहीत' गणूची टकळी चालूच होती.

'अरे, तुम्हाला पहिल्यांदाच शिकवली असतील ना समीकरणं? मग ती सोपी नकोत का? एकदम कठिण गणितं घातली तर कसं येईल मुलांना ते?' भास्कराचार्य म्हणाले.

'पण काका, समीकरणं कशाला हो उगाच शिकवतात आम्हाला? काही उपयोग नाही त्यांचा. तसली गणितं आम्ही तोंडी सुद्धा करू शकतो.' गणू म्हणाला.

'अरे सुरुवातीला अशीच गणितं घालावी लागतात. एकदा समीकरणं सोडवता यायला लागली की मग त्यांच्या उपयोगही करता यायला लागतो' भास्कराचार्य म्हणाले.

'काका, मला समीकरणं सोडवता येतात. मग आता मला त्यांचा उपयोग कसा करतात ते सांगा' गणू आपला मुद्दा पुढे रेटत होता.

'असं? मग सोडव पाहू मी घालतो ते समीकरण!' असं म्हणून

भास्कराचार्यांनी गणूला एक समीकरण घातलं. गणूनी ते फळ्यावर सोडवून दाखवलं.

'छान! खरंच येत हं तुला' असं म्हणून त्यांनी गणूला आणखी कठिण समीकरण सोडवायला दिलं. तेही त्यानी नीट सोडवलं.

'हं. ठीक. आता समीकरणाचा उपयोग कसा होतो ते बघू या. आता हे गणित पहा. एका संख्येची दुप्पट दुसरीच्या तिपटीइतकी आहे. त्यांची बेरीज २० आहे. तर त्या संख्या काढा. समजलं का गणित? परत सांग पाहू?' गणूची सर्व गणित बरोबर म्हणून दाखवलं.

'हं. कर आता' भास्कराचार्य म्हणाले.

गणू गणित करू लागला. थोड्या वेळानी तो म्हणाला 'हं आलं उत्तर. १२ आणि ८.'

'शाबास, आता तू गणित कसं सोडवलंस ते सांग.' भास्कराचार्य म्हणाले.

'आधी मी संख्यांचं प्रमाण काढलं. एकीची दुप्पट आणि दुसरीची तिप्पट सारखीच आहे. ह्यावरून त्या संख्या ३:२ प्रमाणात असल्या पाहिजेत हे मी काढलं. मग २० चे ३:२ प्रमाणात भाग केले. त्यातला एक भाग १२ आणि दुसरा ८ आला.' गणूनी खुलासा केला.

'छान! बरोबर सोडवलंस् तू गणित. आता हेच गणित आपण समीकरणानी सोडवू. संख्या नक्की ठाऊक नसली की तिला क्ष, य अशी अक्षरं देतात हे तुला ठाऊक आहे ना? मग दोन संख्यातल्या एकीला क्ष म्हणू या. मग दुसरी कोणती होईल?'

दोघींच्या बेरजेतून क्ष वजा केला की दुसरी संख्या येईल. म्हणजे (२० – क्ष) होईल.' गणू म्हणाला.

'बरोबर. आता एक संख्या क्ष आणि दुसरी (२० – क्ष). मग दिलेल्या अटीवरून क्षची दुप्पट आणि (२० – क्ष) ची तिप्पट समान असणार. म्हणजेच २क्ष = ३ (२० – क्ष) हे समीकरण झालं.' भास्कराचार्य म्हणाले.

'मी सोडवू का ते?' गणूनी विचारलं. भास्कराचार्यांनी गणूच्या हातात खडू दिला. मग गणूनी ते फळ्यावर सोडवलं.

२क्ष = ६० – ३क्ष

∴ ५क्ष = ६०

∴ क्ष = १२

'झालं, एक संख्या १२ आली. हे फार सोपं आहे की' गणूनी आनंदानी म्हटलं.

'गणू, तुझी रीत आणि समीकरणाची रीत ह्यात फारसा फरक नाहीए. पण समीकरण लिहायला सुटसुटित आणि सोपं असतं हे तुला पटलं असेल. आणि एकदा समीकरण लिहिलं की पुढचं काम खूपच सोपं असतं इतर गणितांच्या मानानी' भास्कराचार्य म्हणाले. हे त्यांचं म्हणणं गणूला पटलं.

'आणि समीकरणाचा आणखी एक मोठा फायदा आहे. गणिताच्या अटी पाळून समीकरण लिहिणं हे काम इतर रीतींच्या मानानी खूपच सोपं आहे. तू केलेल्या रीतीनी गणित करायचं म्हणजे प्रमाणाचं गणित यायला हवं, त्रैराशिक सोडवता यायला हवं. समीकरणात त्याची जरूरी नाही.' भास्कराचार्यांनी समीकरणाचा आणखी एक फायदा सांगितला. अर्थातच 'समीकरणं आम्हाला कशाला शिकवतात?' हा गणूचा प्रश्न केव्हाच विरून गेला.

'समीकरणानी आणखी कसले प्रश्न सोडवता येतात ते सांगा ना काका?' गणू आता ह्या विषयात चांगलाच रंगला होता.

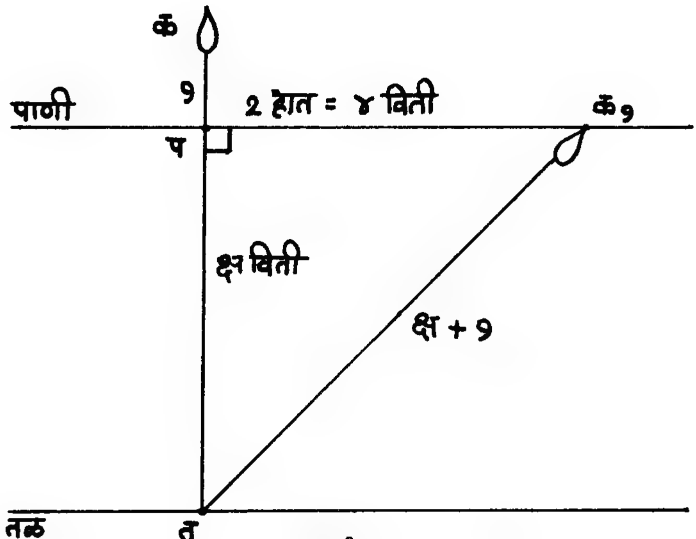
'समीकरणांचा उपयोग सर्वच विषयात होतो. भूमिती, भौतिकशास्त्र, यंत्रशास्त्र, वगैरे विषयातील प्रश्न समीकरणं मांडून सोडवले जातात.' भास्कराचार्य म्हणाले.

'ते झालंच. पण भूमितीमधलं एखादं गणित समीकरणानी कसं सोडवतात ते समजत नाहीए मला. ते दाखवाना!' गणू म्हणाला.

'ठीक आहे. मी तुला भूमितीमधलं एक मजेदार गणित सांगतो. मग ते समीकरण मांडून कसं सोडवायचं तेही दाखवतो' भास्कराचार्य म्हणाले.

'आता गणित ऐक हं. 'एका तळ्यामधे कमळाची एक कळी पाण्यावर १ वीत उंच होती. कलहंसांच्या खेळामुळे पाण्यात लाटा उठल्या. त्यामुळे कळी हळूहळू दूर जाऊन २ हात अंतरावर पाण्याखाली बुडाली. कळी पाण्याच्या पृष्ठभागाला खालून टेकलेली असेल तर तळ्याची खोली किती?' गणू हे गणित ऐकून चकितच झाला. भास्कराचार्यांनी हे गणित आणलं तरी कुठून असा त्याला प्रश्न पडला. इतक्यात भास्कराचार्य म्हणाले.

'आता आपण हे गणित सोडवू या. आधी गणितात काय सांगितलंय् त्याची आकृती काढू. मग समीकरण मांडू आणि ते सोडवून उत्तर काढू' असं म्हणून त्यांनी फळ्यावर एक आकृती काढली. (आकृती . पाहा)



आकृती १

आकृतीत तळ्याचा तळ आणि पाण्याचा पृष्ठभाग दाखवला होता. तळ आणि पाण्याचा पृष्ठभाग ह्यात क्ष विती अंतर दाखवलं होतं. क ही कळी पाण्यापासून १ वीत उंच दाखवली होती. तसंच कळी क$_{१}$ ह्या ठिकाणी प ह्या बिंदूपासून २ हात (म्हणजे ४ विती) अंतरावर पाण्याखाली बुडालेली दाखवली होती. त ह्या कमळाच्या तळापासून क, पर्यंत कमळाचा दांडा सरळ रेषेत दाखवला होता.

'गणू हे बघ. त ह्या ठिकाणी कमळाचा देठ तळाशी रुतला आहे. कमळाचा दांडा पाण्याशी काटकोन करून सरळ उभा होता असं समजू. पत हे अंतर क्ष विती धरू या. म्हणजे तक हे अंतर (क्ष + १) विती होईल.

'पण काका वीत आणि हात ही कुठली मापं आहेत?' गणूनी शंका काढली.

'अरे ती अंतरं मोजण्याची जुनी मापं आहेत. १ हात म्हणजे २विती असं त्यांचं कोष्टक आहे. हं. इकडे लक्ष दे आता. कळी क$_{१}$ इथे पाण्यात बुडाली. म्हणजे तक$_{१}$ हे अंतर तक इतकंच म्हणजे (क्ष + १) विती असणार. पक$_{१}$ हे अंतर २ हात म्हणजे ४ विती आहे. आता तपक$_{१}$, हा काटकोन त्रिकोण आहे. त्याच्या बाजूंचा एक नियम आहे. त्याला 'पायथागोरसचा नियम' असं

नाव आहे. त्या नियमाचा उपयोग करून आपण समीकरण मांडू या. तो नियम असा आहे की 'कर्णाच्या लांबीचा वर्ग = बाजूंच्या लांबीच्या वर्गांची बेरीज. म्हणजेच

$(क्ष + १)^२ = क्ष^२ + (४)^२$ हे समीकरण झालं. ते आता सोडवू या.

$(क्ष + १)^२ = क्ष^२ + ४^२$

$\therefore क्ष^२ + २क्ष + १ = क्ष^२ + १६$

$\therefore$ दोन्हीकडून $क्ष^२$ काढून टाकल्यावर

$$२क्ष + १ = १६$$

$$\therefore २क्ष = १५$$

$$\therefore क्ष = \frac{१५}{२}$$

$$= ७\frac{१}{२}$$

म्हणजे पाण्याच्या पृष्ठभागापासून त हा बिंदू $७\frac{१}{२}$ विती खोल आहे. ती तळ्याची खोली झाली.' पायरी पायरीनी त्यांनी गणित सोडवलं. एवढं सर्व गणित गणूला समजलं की नाही हे ते अधून मधून त्याला विचारून बघत होते. गणित गणूला चांगलं समजलं. इतकंच नव्हे तर त्याला ते खूप आवडलंसुद्धा.

'काका, किती छान गणित आहे हे. हे तुम्ही कुठून काढलंत?' त्यानी विचारलं.

'आपल्या भारतात भास्कराचार्य नावाचे प्रसिद्ध गणिती होऊन गेले. त्याचं नाव ऐकलं आहेस का तू?' भास्कराचार्यांनी गणूला विचारलं.

'नाव ऐकलं आहे. पण नक्की माहिती नाही' गणू म्हणाला.

'त्यांच्या 'लीलावती' नावाच्या ग्रंथातलं हे गणित आहे' भास्कराचार्य म्हणाले.

'त्यांना समीकरणं येत होती का?' गणूनी लगेच शंका काढली.

'आता आपण करतो तशी समीकरणं सोडवायची तेव्हा पद्धत नव्हती. भास्कराचार्यांनी हे गणित भूमितीच्या सूत्रांचा वापर करून सोडवलं होतं. ती सूत्रं म्हणजे समीकरणंच असतात'. भास्कराचार्य म्हणाले.

'मग ती रीत दाखवा ना मला' गणू म्हणाला.

हा एवढासा मुलगा गणितं करायला कंटाळत कसा नाही ह्याचं भास्कराचार्यांना आश्चर्य वाटलं. ते म्हणाले.

‘गणू, ती रीत तुला समजण्यासारखी नाहीए. पुढे कधी तरी दाखवीन तुला.’

‘भास्कराचार्यांनी आणखी मजेदार गणितं लिहिली असतील ना काका?’ तो म्हणाला.

‘हो, पुष्कळ आहेत. पण आता आज पुरे. तू दमशील फार अभ्यास करून. उद्या दाखवीन तुला आणखी गणितं’. जाता जाता गणू म्हणाला.

‘काका, सगळेजण तुम्हाला भास्कराचार्य का म्हणतात ते आता कळलं मला’ भास्कराचार्य नुसते हसले व घरात गेले.

७

भास्कराचार्यांच्या नावाचं रहस्य समजल्यापासून गणूला मूळ भास्कराचार्य कोण होता आणि त्यानी काय केलं. ह्याबद्दल फार कुतूहल वाटू लागलं. त्याला राहवेना. दुसऱ्या दिवशी शाळा सुटल्याबरोबर घरी दप्तर टाकून तो लगेच भास्कराचार्यांकडे निघाला. गणू येणार ह्याची त्यांना खात्री होती. त्यांनी गणूसाठी एक गणित फळ्यावर लिहून ठेवलं होतं. गणित असं होतं—

एका गावात एक शंकराचं देऊळ होतं. देवळाला चार दारं होती. प्रत्येक दारासमोर एक तलाव आणि एक गणपतीचं देऊळ होतं. तलावाच्या पाण्याचा असा गुण होता की त्याच्या पाण्यात कमळं धुतली की त्यांची संख्या दुप्पट होई. एक ब्राह्मण काही कमळं घेऊन देवळात आला. पहिल्या तलावात त्यानी कमळं धुतली. त्यातली काही पहिल्या गणपतीला वाहिली. उरलेली कमळं घेऊन तो दुसऱ्या तलावावर गेला. तिथे पहिल्याप्रमाणे पूजा करून पुढच्या तलावावर गेला. ह्या प्रमाणे चारी ठिकाणी करून चारही गणपतींना त्यानी सारखीच कमळं वाहिली. तेंव्हा त्याच्या जवळची सर्व कमळं संपली. तर त्यानी प्रथम किती कमळं नेली होती व प्रत्येक गणपतीला किती कमळं वाहिली ?

आल्या आल्या गणूनी ते गणित वाचलं. हे गणितही पूर्वीच्या भास्कराचार्यांचंच असावं असं त्याला वाटलं. आणि त्यानी ते भास्कराचार्यांना विचारलंही. त्यांनी मान डोलावली.

'गणू, हे गणित भास्कराचार्यांनी त्यांच्या 'लीलावती' नावाच्या ग्रंथात घातलेलं आहे. हे पण बीजगणितानी सोडवता येतं.' भास्कराचार्य म्हणाले. त्यांनी गणूला ते सोडवायला सांगितलं. गणूनी थोडा वेळ विचार केला. तो म्हणाला,

'शेवटच्या गणपतीला वाहिलेली कमळं क्ष धरू. तेवढीच त्यांनी प्रत्येक गणपतीला वाहिली.'

'बरोबर, शेवटी त्याच्याजवळ क्ष कमळं झाली. म्हणजे चौथ्या तलावात कमळं धुण्यापूर्वी त्याच्याजवळ किती कमळं होती, सांग पाहू!' भास्कराचार्य

म्हणाले.

'क्ष च्या निम्मी म्हणजे $\frac{क्ष}{२}$ कमळं त्याच्याजवळ होती.'

'मग तिसऱ्या गणपतीला क्ष कमळं वाहण्यापूर्वी त्याच्या जवळ किती कमळं होती?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.'

'त्यांनी क्ष कमळं वाहिली नी $\frac{क्ष}{२}$ त्याच्याजवळ उरली. म्हणजे त्याच्याजवळ

$क्ष + \frac{क्ष}{२} = \frac{३}{२}$ क्ष कमळं होती.'

गणू म्हणाला. इतक्यात त्याला कल्पना सुचली. तो म्हणाला,

'भास्करकाका मी हे सगळं गणित फळ्यावर लिहू का?'

'लिही की' भास्कराचार्य म्हणाले, मग गणूनी सर्व गणित फळ्यावर लिहिलं. ते असं होतं.

चौथ्या गणपतीला वाहिलेली कमळं = क्ष

चौथ्या तलावात धुतलेली कमळं = $\frac{क्ष}{२}$

तिसऱ्या गणपतीला वाहण्यापूर्वीची कमळं = $\frac{क्ष}{२} + क्ष = \frac{३}{२}$क्ष

तिसऱ्या तलावात धुतलेली कमळं = $\frac{३}{४}$क्ष

दुसऱ्या गणपतीला वाहण्यापूर्वीची कमळं = $\frac{३}{४}क्ष + क्ष = \frac{७क्ष}{४}$

दुसऱ्या तलावात धुतलेली कमळं = $\frac{७}{८}$क्ष

पहिल्या गणपतीला वाहण्यापूर्वीची कमळं = $\frac{७}{८}क्ष + क्ष = \frac{१५क्ष}{८}$

पहिल्या तलावात धुतलेली कमळं = $\frac{१५}{१६}$क्ष

म्हणजे बरोबर नेलेली कमळं = $\frac{१५}{१६}$क्ष

इतकं गणित लिहिल्यावर गणू थांबला. आता क्ष म्हणजे किती हे समजल्याशिवाय ब्राह्मणानी बरोबर नक्की किती कमळं नेली होती हे कसं काढणार असा प्रश्न त्याला पडला. भास्कराचार्य गणू काय लिहितो ते पहात होते. ते म्हणाले 'शाबास गणू. हे गणित तू अगदी बरोबर लिहिल आहेस. आता क्ष ची किंमत किती असेल, त्याचा अंदाज कर पाहू. कमळांची संख्या फक्त पूर्णांकातच असली पाहिजे एवढं लक्षात ठेव म्हणजे झालं.'

भास्कराचार्यांनी दिलेल्या सूचनेवर गणू विचार करु लागला. $\frac{१५}{१६}$ ला कितीनी

गुणलं म्हणजे नेमका पूर्णांक येईल. ह्याचा विचार करताना त्याला एकदम उत्तर सापडलं.

'समजलं भास्करकाका, क्ष बरोबर १६ असले पाहिजेत'

'अगदी बरोबर. मग आता गणिताचं उत्तर सांग पाहू' भास्कराचार्य म्हणाले.

'क्ष म्हणजे प्रत्येक गणपतीला वाहिलेली कमळं १६, आणि बरोबर नेलेली कमळं $\frac{१५क्ष}{१६} = \frac{१५ \times १६}{१६} = १५$' गणूनी फळ्यावर उत्तर लिहिलं.

'छान! उत्तर एकदम बरोबर. आता सर्व गणिताचा ताळा करून दाखव पाहू.' भास्कराचार्य म्हणाले.

'गणूनी फळ्यावर ताळा लिहून दाखवला.

'नेलेली कमळं १५. त्यांची दुप्पट ३०. त्यापैकी १६ कमळं पहिल्या गणपतीला वाहिली. उरलेली कमळं १४. त्यांची दुप्पट २८. त्यातील १६ कमळं दुसऱ्या गणपतीला वाहिली. उरलेली कमळं १२. त्यांची दुप्पट २४. त्यातील १६ तिसऱ्या गणपतीला वाहिली. उरलेली कमळं ८. त्यांची दुप्पट १६. ती चौथ्या गणपतीला वाहिली.' गणिताचा ताळा बरोबर जुळल्यामुळे गणूला फारच आनंद वाटला. गणित सोडवण्याचा आनंद किती मोठा असतो हे आता गणूला चांगलं समजून आलं. गणूची मन:स्थिती भास्कराचार्यांनाही समजली. ते हसू लागले. पण त्यांना ह्या गणितातली आणखी गंमत गणूला सांगायची होती. ते म्हणाले,

'गणू, झालं का हे गणित पुरं? की आणखी काही सुचतंय् तुला?'

त्यांच्या म्हणण्यावर गणू विचार करू लागला. थोड्याच वेळात भास्कराचार्यांना काय म्हणायचंय् ते त्याच्या लक्षात आलं. तो एकदम् हंसला, नी म्हणाला,

'भास्करकाका, गणित अजून पुष्कळ करता येईल. सांगू का उत्तर?'

'हं, सांग' भास्कराचार्य म्हणाले.

'मगाशी क्ष बरोबर १६ धरले. पण क्ष ची किंमत ३२ धरली तरी चालेल, ४८, ६४ अशी १६ च्या पटीतली कुठलीही चालेल. म्हणजे मग नेलेली कमळं १५च्या ऐवजी ३०, ४५, ६० अशी होतील आणि वाहिलेली कमळं १६च्या ऐवजी ३२, ४८, ६४ अशी होतील'

'शाबास गणू, आता तुला हे गणित पुरतं सुटलं. पण ह्या गणिताची खरी

गंमत अजून पुढेच आहे. तू कंटाळला नसलास तर सांगतो' भास्कराचार्य म्हणाला.

'मी मुळीच कंटाळलो नाही. सांगा मला आणखी गंमत' गणू उत्साहानी म्हणाला.

'हे बघ. आपण आता प्रत्येक तलावात कमळं किती होती त्याचे आकडे मांडू.' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी ते आकडे फळ्यावर मांडले. ते असे होते.

$\frac{क्ष}{२}, \frac{३क्ष}{४}, \frac{७}{८}क्ष, \frac{१५}{१६}क्ष$

'आता ह्यातील क्ष ही संख्या आपण काढून टाकू आणि उरलेले आकडे लिहू. ते येतील $\frac{१}{२}, \frac{३}{४}, \frac{७}{८}, \frac{१५}{१६}$ ह्यातल्या छेदांचे आकडे पाहिले तर ते आहेत २, ४, ८, १६. हे आकडे कसे आहेत बघ. पहिला आकडा २ आहे, आणि पुढे प्रत्येक ठिकाणी आधीच्या आकड्याची दुप्पट लिहिली आहे. त्यात २ हे पहिलं पद, ४ हे दुसरं पद ह्याप्रमाणे कितीही पदं लिहिता येतात. आता ह्याप्रमाणे सहा पदांच्या संख्या लिही पाहू. मी प्रथम पदांचे आकडे लिहितो त्याच्या खाली तू योग्य त्या संख्या लिही' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी पदांचे आकडे एका ओळीत लिहिले.

त्यांच्या खाली गणूनी संख्या लिहिल्या ते असं—

पद	१	२	३	४	५	६
संख्या	२	४	८	१६	३२	६४

'आता गणू हे बघ $२ = २^{१}$, $४ = २^{२}$, $८ = २^{३}$ हे तुला ठाऊक आहे. पुढचे आकडे कसे लिहिशील सांग पाहू' भास्कराचार्य म्हणाले. गणूनी वर लिहिलेल्या संख्या पाहिल्या आणि $१६ = २^{४}$, $३२ = २^{५}$, $६४ = २^{६}$ असं लिहिलं.

'आता $\frac{१}{२}$ $\frac{३}{४}$ $\frac{७}{८}$ $\frac{१५}{१६}$ ह्यातील अंशाचे आकडे पहा. ते आहेत १, ३, ७, १५. हे आकडे कसे आले असतील सांग पाहू.'

त्यात काय? छेदापेक्षा प्रत्येक आकडा १ नी कमी आहे', गणू लगेच म्हणाला.

म्हणजे गणू असं होईल पहा — $\frac{२^{१}-१}{२^{१}}, \frac{२^{२}-१}{२^{२}}, \frac{२^{३}-१}{२^{३}}, \frac{२^{४}-१}{२^{४}}$

अशा प्रकारे ठराविक प्रकारानी येणाऱ्या संख्यांना 'श्रेढी' असं नाव

भास्कराचार्यांनी दिलं आहे. म्हणजे

१, ३, ७, १५ ....., तसंच २, ४, ८, १६... ह्या श्रेढी आहेत. आता १, ३, ७, १५ ... ह्या श्रेढीतल्या संख्या कशा येतात त्याची आणखी एक रीत पहा. त्यासाठी १, २, ४, ८, १६, ...ही श्रेढी घेऊ. ह्या श्रेढीला भूमिती श्रेढी असं नाव आहे.

आता पहा—

१ = १,

३ = १ + २

७ = १ + २ + ४

१५ = १ + २ + ४ + ८

ह्या संख्यांची गंमत तुला समजली का सांग पाहू! आणि त्याचा कमळांच्या गणिताशी काय संबंध आहे ते पण सांग' भास्कराचार्य गणूला जास्त कठिण कामं सांगत होते. उत्तर शोधायला गणूला फार वेळ लागला नाही.

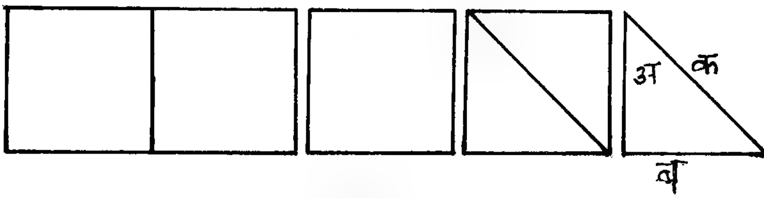
'सांगू काका उत्तर? १, ३, ७, १५ ...ह्या श्रेढीतली पहिली संख्या म्हणजे भूमितीश्रेढीतलं पहिलं पद, दुसरी संख्या म्हणजे भूमिती श्रेढीतल्या पहिल्या दोन पदांची बेरीज, तिसरं पद म्हणजे भूमितीश्रेढीतल्या पहिल्या तीन पदांची बेरीज, चौथं पद म्हणजे तिच्या पहिल्या चार पदांची बेरीज. आणि कमळांच्या गणितातल्या संख्या ह्या श्रेढीतून आपल्याला मिळतात.'

'अगदी बरोबर, भास्कराचार्यांनी ते गणित सोडवायची रीत सांगितली आहे ती ह्या श्रेढींवर आधारलेलीच आहे. ती अशी की श्रेढीतला पहिला अंक १ धरला तर १ + २ + ४ + ८ +. . . ह्या श्रेढीतल्या पहिल्या चार संख्यांची बेरीज करा. ती नेलेल्या कमळांची संख्या. ह्या संख्येत १ मिळवला की ती वाहिलेल्या कमळांची संख्या. कसं काय वाटलं हे गणित तुला?' भास्कराचार्यांनी गणूला विचारलं.

'हे गणित मला खूपच आवडलं. मी आता माझ्या मित्रांना हे कोडं घालीन. पण काका भास्कराचार्य-पंडितानी बीजगणितासारखं भूमितीतसुद्धां काहीतरी मजेदार गणित केलं असेल ना? ते सांगा ना मला.' गणू म्हणाला.

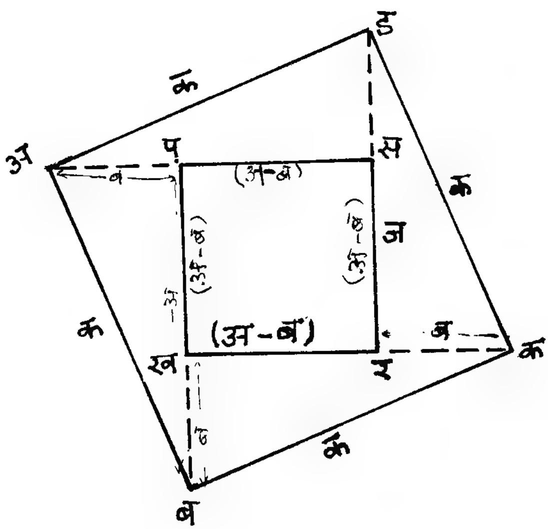
'वा! भूमितीतसुद्धा भास्कराचार्यांनी खूप गणितांच्या रीती सांगितल्या आहेत. आज तुला त्यातल्या दोनच गंमती सांगतो. कारण आज आधीच जरा उशीर झाला आहे. काटकोन त्रिकोणाच्या बाजूंचा एक नियम फार प्रसिद्ध

आहे. तो नियम भास्कराचार्यांनी बीजगणिताचा उपयोग करून सिद्ध केला आहे. त्याची रीतही समजायला सोपी आहे. ती रीत मी तुला दाखवतो.' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी एक काटकोन चौकोनी कागद घेतला. मधोमध घडी घालून त्याचे दोन काटकोन चौकोन केले. ते कर्णावर बरोबर कापून चार सारखे काटकोन त्रिकोन तयार केले. (आकृती १ पाहा)



आकृती १

काटकोन त्रिकोणाची एक बाजू अ, दुसरी बाजू ब आणि कर्ण क असेल तर $अ^{२}$ आणि $ब^{२}$ ह्यांची बेरीज $क^{२}$ इतकी येते. थोडक्यात $अ^{२} + ब^{२} = क^{२}$



आकृती २

हा नियम भास्कराचार्यांनी कसा दाखवला ते पहा.' असं म्हणून त्यांनी चार त्रिकोण एकमेकांना जोडून असे ठेवले की त्यातून एक चौरस तयार झाला. (आकृती २ पाहा)

'हे बघ गणू, अबकड चौरसाची बाजू क आहे आणि आत झालेल्या पखरस चौरसाची बाजू (अ-ब) इतकी आहे. आता अबकड चौरसाचं क्षेत्रफळ $क^२$ आहे. हे क्षेत्रफळ चौरस पखरस आणि चार काटकोन त्रिकोण ह्यांच्या एकूण क्षेत्रफळा इतकं आहे. पखरसचं क्षेत्रफळ $(अ-ब)^२$ इतकं आहे आणि एका काटकोन त्रिकोणांचं क्षेत्रफळ $\frac{१}{२}$ अ × ब म्हणजेच चार त्रिकोणांचं मिळून क्षेत्रफळ $४ \times \frac{१}{२} \times अ \times ब = २अब$ इतकं आहे.

आता $क^२ = (अ+ब)^२ + २अब$

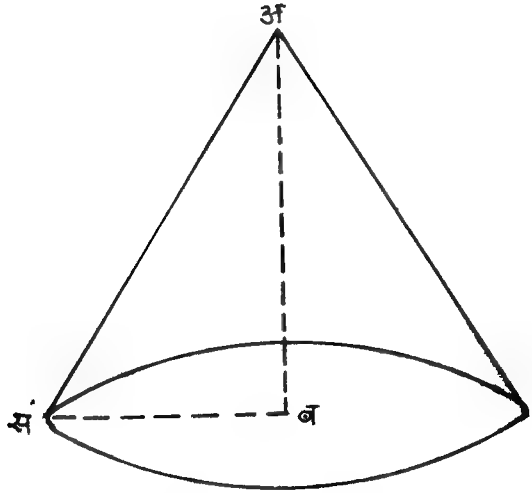
$\therefore क^२ = अ^२ + ब^२ - २अब + २अब$

$\therefore क^२ = अ^२ + ब^२$

एवढं सर्व गणित गणूला समजलं की नाही हे भास्कराचार्य पहात होते. गणूला ते समजलं होतं हे त्याच्या चेहेऱ्यावरुन त्यांना समजलं. गणूनी ते चार त्रिकोण घेऊन पुन्हा त्यांना नीट जुळवून दाखवले.

'हे बरोबर आहे ना भास्कराकाका? आता हे कोडं पण मी माझ्या मित्रांना घालीन.' गणू म्हणाला.

'गणू क्षेत्रफळाच्या गणितासारखा घनफळाच्या गणिताचाही अभ्यास भास्कराचार्यांनी केला होता. त्यातलं एक मजेशीर उदाहरण सांगतो. आपण जमिनीवर धान्याची रास केली की ती वरती टोकदार आणि खाली पसरट अशी बनते. त्या आकाराला शंकू म्हणतात. धान्याची रास केली तर तिचं घनफळ म्हणजे राशीतलं धान्य किती हे कसं काढायचं ह्याच्या रीती भास्करचार्यांनी दिल्या आहेत. आता आधी शाळेच्या भूमितीत शंकूच्या घनफळाचं कोणतं सूत्र असतं ते पाहू. ही शंकूची आकृती पहा. तिचा तळ वर्तुळाकार आहे. वर्तुळाची त्रिज्या बस एवढी आहे आणि अब ही शंकूची उंची आहे. शंकूच्या घनफळाचं सूत्र $\frac{१}{३}$ तळाचे क्षेत्रफळ × उंची असं आहे. म्हणजेच $\frac{१}{३} \times (\frac{२२}{७} \times त्रि^२ \times उंची$ = शंकूचं घनफळ. भास्कराचार्यांनी म्हटलंय् —"धान्याच्या ढिगाच्या परिघाचा सहावा हिस्सा घ्या. त्याच्या वर्गाला उंचीनी गुणा म्हणजे धान्याचं घनफळ येईल." हे सूत्र आणि शाळेत आता शिकवतात ते सूत्र एकच आहे. आणि धान्याची रास फक्त तिच्या तळाचा घेर मोजून



आकृती ३

ठरवायला अगदी सोपंही आहे. धान्याची उंची काढण्यासाठी भास्कराचार्यांनी सूत्रं दिली आहेत. ती अशी—

मोठ्या गोल दाण्यांची रास असेल तर ढिगाची उंची परिघाच्या $\frac{१}{१०}$ असते. बाजरी, ज्वारी, मूग, वाटाणे वगैरे धान्यांसाठी हे सूत्र वापरायचं.

बारीक गोल दाण्यांची रास असेल तर ढिगाची उंची परिघाच्या $\frac{१}{११}$ इतकी असते. खसखस,राजगिरा, वरी इ. धान्यांसाठी हे सूत्र वापरायचं.

लांबट, टोकदार दाण्यांची रास असेल तर ढिगाची उंची परिघाच्या $\frac{१}{९}$ असते. गहू, तांदुळ, जवस वगैरे धान्यांसाठी हे सूत्र वापरायचं.'

'वा! किती मजेदार सूत्रं दिली आहेत त्यांनी. पण भास्करकाका ही उंचीची सूत्रं त्यांनी कशी काढली असतील?'

गणूनी विचारलं.

'अरे ते नुसते आकडेमोड करणारे गणिती नव्हते. त्यांनी प्रत्यक्ष प्रयोगाचा अनुभव घेऊनच ती सूत्रं काढली असणार ह्यात शंका नाही' भास्कराचार्य कौतुकानी म्हणाले. एवढ्या भाषणानंतर कुणालाच अधिक काही बोलावंसं वाटलं नाही. गणू न बोलताच मनातल्या मनात भास्कराचार्यांना धन्यवाद देत घरी गेला.

८

रविवार असल्यामुळे मी त्या दिवशी बागेतलं काम आटोपून निवांतपणे वर्तमानपत्र वाचायला बसलो. पण कसलं काय? समोरून गणू येताना दिसला. गणू आल्यावर निवांतपणा कुठला? गणू आला म्हणजे मेंदूला व्यायाम हे अगदी पक्कं समीकरण झालं होतं. गणू आत आल्यावर मी त्याच्याकडे थोडा वेळ दुर्लक्ष केलं. पण तो इकडे तिकडे घोटाळत राहिला. मग मीच त्याला हाक मारली.

'काय गणू? सकाळीच कसा काय आलास? अभ्यास-बिभ्यास नाही वाटतं?'

'अभ्यास काल दुपारीच करून टाकला.' गणू म्हणाला.

'मग आज तुझा काही तरी प्रश्न असणारच! होय ना?' मी म्हटलं.

'प्रश्न आहेच. पण तुम्हाला वेळ असला तर विचारतो' गणू म्हणाला. गणू तसा वयाच्या मानाने चाणाक्ष होता.

'विचार, खुशाल विचार' मी म्हणालो.

'काका, गोल श्रेष्ठ की चौकोन श्रेष्ठ?' गणूनी विचारलं. गणूचा प्रश्न ऐकून मी सर्दच झालो. हा प्रश्न विचारण्याचं कारण काय आणि त्याला उत्तर काय द्यायचं हे मला सुचेना. पण गणूसारख्या लहान मुलापुढे हार खाण्याची कल्पनाही करवेना. मी फारसा विचार न करता म्हटलं.

'गोल श्रेष्ठ, चौकोनापेक्षा'

'का म्हणून? ह्याला कारण काय?' गणूनी विचारलं. गणूचा हा प्रश्न येणार हे मला ठाऊक होतं आणि सुदैवाने मला त्याचं उत्तरही सुचलं होतं.

'गोलच श्रेष्ठ! आपली पृथ्वी गोल नाही का? आणि चंद्र, सूर्य, सगळे ग्रह गोलच आहेत,' मी म्हटलं हे उत्तर ऐकून गणू जरा गप्प झाला. ह्याच्या उलट काय म्हणावं हे त्याला सुचेना.

'पृथ्वी गोल आहे हे कबूल. पण आपण वापरतो त्यातल्या कितीतरी गोष्टी चौकोनी असतात. आपण रहातो ते घरही चौकोनीच असतं.' गणू म्हणाला.

'अरे त्या आपण बनवलेल्या वस्तू आहेत म्हणून त्या चौकोनी असतात.

निसर्गात बनलेल्या वस्तू बहुतेक गोलच असतात. बघ ना, लिंबू, मोसंबं, कलिंगड ही फळं गोल आहेत. पाण्याचे थेंब आपोआप गोलच बनतात.' मी म्हटलं.

'पण पडवळ लांब असतं, शेंगा लांबट नि चपट्या असतात. पानं तर कितीतरी आकारांची असतात. मग निसर्गात सगळ्या वस्तू काही गोल नसतात.' गणू म्हणाला.

'ठीक आहे. गोल नसतील सगळ्या वस्तू. पण चौकोनी मात्र एकही वस्तू नसते. एखादं चौकोनी फळ किंवा फूल पाह्यलंस् का तू कधी?' मी म्हटलं.

ह्याच्यावर गणूला काही उत्तर सुचेना. तो विचार करू लागला. थोड्या वेळानी त्याला उत्तर सुचलं तो एकदम हंसला, नि टाळी वाजवून म्हणाला.

'सापडलं उत्तर! काका निरनिराळे स्फटिक तर निसर्गातच तयार होतात ना?'

'हो' मी म्हटलं.

'मग आता पहा, मीठ, साखर आपण रोज वापरतो. त्याचे खडे चौकोनीच असतात. खडीसाखर चौकोनी असते. हं आणि आठवलं. आम्हाला बाईंनी मोरचुदाचे निळे स्फटिक दाखवले होते. ते पण चौकोनी होते.' गणू म्हणाला.

'हे बरोबर आहे. म्हणजे असं म्हणता येईल की निसर्गात श्रेष्ठ-कनिष्ठ काही नाही. गोल नि चौकोन सारखेच!' मी म्हटलं.

'पण आता चौकोन श्रेष्ठ म्हणायला लागेल. कारण आपण वापरतो त्या किती तरी वस्तू चौकोनी असतात.' गणू म्हणाला.

'असंच काही नाही. आपण घरात भांडी वापरतो, ताटं, वाट्या, डबे, कप-बशी, बाटल्या वापरतो. त्या कुठे चौकोनी असतात?' मी म्हटलं.

आता मात्र गणूला काही सुचेना. जरा वेळ इकडे तिकडे करून तो म्हणाला 'काका, मी जातो. उशीर झालाय्.' एखादा विषय सुचला की त्याचं उत्तर सापडेपर्यंत गणूला चैन पडत नाही. आणि उत्तर सापडेनासं झालं की भास्कराचार्यांकडे जायचं हे आता ठरलेलंच होतं. त्या दिवशी संध्याकाळी गणू भास्कराचार्यांकडे गेला.

गणू भास्कराचार्यांकडे पोचला तेव्हा त्यांच्या अंगणात मुलं खेळत होती. साबणाच्या पाण्यात कागदाची नळी बुडवून ती साबणाचे फुगे उडवत होती. भास्कराचार्य हंसत हंसत त्यांचा खेळ पहात होते. गणूसुद्धा थोडा वेळ फुगे

पाहण्यात दंग झाला. इतक्यात भास्कराचार्य त्याला म्हणाले-

'गणू, साबणाच्या गोल फुग्यांची मुख्य गंमत काय आहे ठाऊक आहे का तुला?'

'नाही बुवा' गणू म्हणाला.

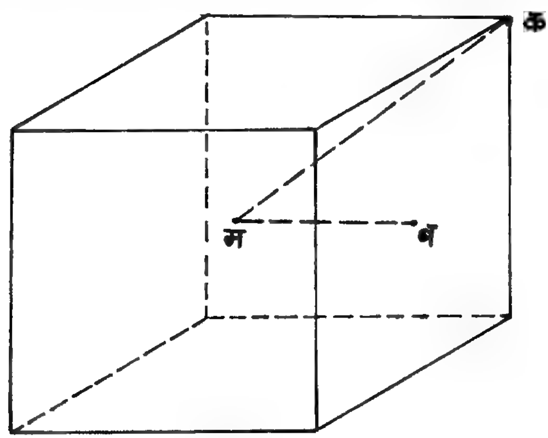
'साबणाचा फुगा गोल असतो, नि गोल हा आकार फार वैशिष्ट्यपूर्ण आहे. एक म्हणजे गोल हा कुठूनही पाहिला तरी सारखाच दिसतो. गोलाच्या केंद्राभोवती सगळे बिंदू सारखे रचलेले असतात. गोलाच्या केंद्रातून जर तो बरोबर कापला तर त्याचे दोन्ही भाग अगदी एकमेकांसारखे असतात.

'मग तसं चौरस ठोकळ्याचंही होईल. तो पण त्याच्या मध्यातनं बरोबर कापला तर त्याचे दोन सारखे भाग होतील.' गणू म्हणाला.

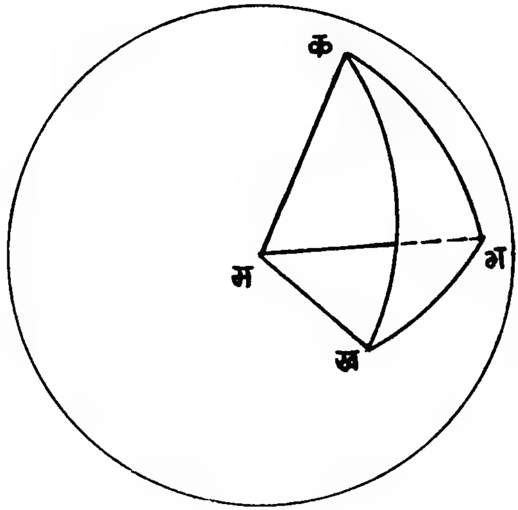
'ते खरंय्. पण मुळातच चौरस ठोकळ्यात आणि गोलात फरक आहे. चौकोनी ठोकळ्याचे सर्व बिंदू त्याच्या मध्यापासून सारख्या अंतरावर नसतात. हे बघ, आपण आकृती काढूनच पाहू' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी फळ्यावर एक चौरसाकृती ठोकळा काढला. 'समज की 'म' हा ठोकळ्याचा मध्य आहे, क हा कोपरा आहे नि 'ब' हा एका बाजूच्या पृष्ठाचा मध्य आहे. आता बघ. मब अंतर आणि मक अंतर सारखं आहे का?' त्यांनी विचारलं.

'नाही. मक अंतर मब पेक्षा जास्त आहे.' गणू म्हणाला.

'आता गोलावर पहा. गोलावरचे सगळे बिंदू त्याच्या केंद्रापासून सारख्या



आकृती १



आकृती २

अंतरावर असतात.' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी फळ्यावर गोलाचं चित्र काढलं आणि त्याच्यावरचे दोन तीन बिंदू दाखवले.'

'हे बघ गणू, म हा गोलाचा मध्य किंवा केंद्रबिंदू आहे आणि क, ख, ग हे गोलावरचे बिंदू आहेत. मक, मख, मग ही सर्व अंतरं समान असतात.' भास्कराचार्य म्हणाले. भास्कराचार्य आकृती फार छान काढतात. त्या आकृती पहाणं आणि त्या काढताना भास्कराचार्यांना पहाणं हे सुद्धा गणूचं एक प्रकारचं शिक्षणच होतं. भास्कराचार्यांचं सारं काम अगदी नीटनेटकं असायचं. अक्षर छान, वळणदार असायचं. त्यांचं पाहून गणूलाही तशीच सवय लागायला सुरुवात झाली होती. गणूमध्ये पडलेला फरक पाहून त्याच्या आईला फार बरं वाटत होतं. भास्कराचार्यांनी काढलेल्या आकृतीकडे गणू बघत होता, पण त्याच्या नजरेत थोडी शंका दिसत होती.

'काय गणू, खरं नाही वाटत का नुसतं चित्र बघून ? थांब, मी तुला प्रत्यक्षच दाखवतो.' असं म्हणून भास्कराचार्य घरात गेले. त्यांनी एक लिंबू आणलं. चित्रात दाखवल्यासारखी त्याची एक फाक कापून बाहेर काढली. गणूनीं लिंबाच्या केंद्रबिंदूपासून त्याच्या सालीपर्यंत अंतर मोजून ते सगळीकडे सारखं

असल्याची खात्री करून घेतली. हे पाहून भास्कराचार्यांना मनातून खूप आनंद झाला. पण फक्त जरासं हंसून त्यांनी तो व्यक्त केला.

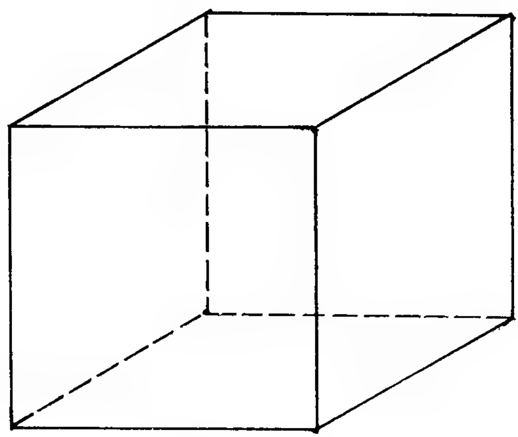
'झाली ना खात्री गणू?' ते म्हणाले.

'हो झाली. पण गोलाबद्दल तुम्ही आणखी काहीतरी सांगणार होतात ना?' गणू म्हणाला.

'हं. गोलाचं आणखी एक वैशिष्ट्य आहे. समजा आपण गोल, चौरसाकृती, आयताकृती असे निरनिराळे सारख्या आकारमानाचे म्हणजे घनफळ सारखे असलेले ठोकळे घेतले तर इतर कोणत्याही ठोकळ्याच्या पृष्ठभागापेक्षा गोलाचा पृष्ठभाग लहान असतो' भास्कराचार्य म्हणाले.

'पृष्ठभाग म्हणजे काय?' गणूनी विचारलं.

'पृष्ठभाग म्हणजे त्या आकृतीच्या बाजू असतात त्यांचं एकूण क्षेत्रफळ' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी फळ्यावर एका ठोकळ्याचं चित्र काढलं.



आकृती ३

'हा ठोकळा बघ. ह्याला किती बाजू आहेत?' त्यांनी विचारलं. गणूनी बाजू मोजल्या.

'सहा बाजू आहेत' तो म्हणाला.

'प्रत्येक बाजूचं क्षेत्रफळ कसं काढायचं?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'लांबी × रुंदी. आम्हाला शिकवलंय् बाईंनी' गणू म्हणाला.

'मग असं साही बाजूंचं क्षेत्रफळ काढायचं त्यांची बेरीज करायची. तेवढा झाला ठोकळ्याचा पृष्ठभाग' भास्कराचार्य म्णाले.

'पण गोलाला कुठे बाजू आहेत? मग त्याचा पृष्ठभाग कसा काढणार?' गणूनी शंका काढली.

'गोलाला बाजू नसतात. पण त्याच्या पृष्ठभागाचं क्षेत्रफळ कसं काढायचं त्याचं सूत्र आहे. असं म्हणून भास्कराचार्यांनी सूत्र फळ्यावर लिहिलं. ते असं होतं.

$४ \times \pi \times \text{त्रि}^{२}$ = गोलाचे पृष्ठफळ.

'आणि गोलाचं घनफळ कसं काढतात?' गणूनी विचारलं.

'त्याचं सूत्र आहे

$\frac{४}{३} \times \pi \times \text{त्रि}^{३}$ = गोलाचे घनफळ'

असं म्हणून भास्कराचार्यांनी ते सूत्र फळ्यावर लिहिलं.

'आता आपण एक चौरस बाजू असलेला चौकोनी ठोकळा घेऊ नि त्याचं घनफळ आणि पृष्ठभागाचं क्षेत्रफळ काढू' भास्कराचार्य म्हणाले. त्यांनी फळ्यावर एक चौकोनी ठोकळा काढला. त्याची प्रत्येक बाजू २ सेमी. धरली.

'गणू ह्या ठोकळ्याचं घनफळ कसं काढायचं सांग पाहू!' ते म्हणाले.

'लांबी × रुंदी × उंची = घनफळ' गणू म्हणाला.

'मग ह्या ठोकळ्याचं घनफळ किती?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'२ × २ × २ बरोबर ८ घन सेंटिमीटर' गणूनी उत्तर दिलं.

'बरोबर. आता ह्या ठोकळ्याचा पृष्ठभाग किती ते सांग' भास्कराचार्य म्हणाले.

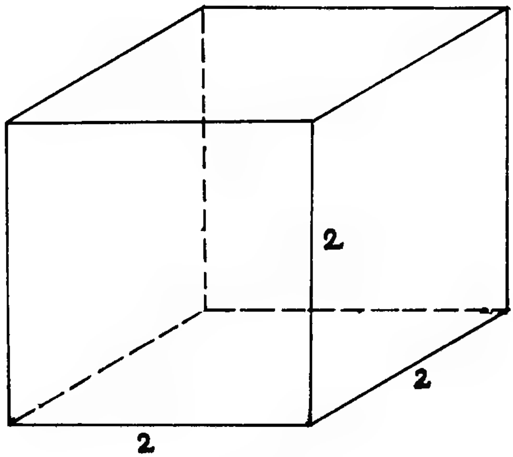
'प्रत्येक बाजूचं क्षेत्रफळ ४ चौरस सेंटिमीटर. सहा बाजूंचं एकूण क्षेत्रफळ २४ चौरस सेंटिमीटर' गणू म्हणाला.

'छान. हे आकडे आपण फळ्यावर लिहून ठेवू' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी ते आकडे फळ्यावर लिहिले.

'आता आपण गोलाचं घनफळ आणि पृष्ठभाग काढू या' भास्कराचार्य म्हणाले.

'पण त्रिज्या किती घ्यायची गोलाची?' गणूनी विचारलं.

'आधी गोलाचं घनफळ किती घ्यायचं ते सांग' भास्कराचार्य म्हणाले.



आकृती ४

'हं समजलं. आपण सगळे ठोकळे सारख्या घनफळाचे घ्यायचे असं ठरवलं होतं. म्हणजे गोलाचं घनफळसुद्धा ८ घनसेंटिमीटर आहे' गणू म्हणाला.

'बरोबर. आता आपण गोलाच्या घनफळाचं सूत्र लिहू. त्यावरून गोलाची त्रिज्या किती ते काढू' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी फळ्यावर सूत्र लिहिलं.

$\frac{४}{३} \times \frac{२२}{७} \times \text{त्रि}^{३} = ८$. मग ते म्हणाले,

'आता आपण हे समीकरण सोडवू. ४ नी दोन्ही बाजूंना भाग जातो. म्हणून

$\frac{१}{३} \times \frac{२२}{७} \times \text{त्रि}^{३} = २$

असं येईल. आता गणित सोपं व्हावं म्हणून आपण $\frac{२२}{७}$ च्या ऐवजी $\frac{२१}{७}$ घेऊ. म्हणजे $\frac{२१}{७} = ३$ असं येईल आणि $\frac{१}{३} \times ३ = १$ येईल' भास्कराचार्य म्हणाले.

'म्हणजे $\text{त्रि}^{३} = २$ असं होईल' गणू म्हणाला.

'बरोबर. म्हणजे आता फक्त २ चं घनमूळ काढायचं काम राहिलं. तेही आपण जरा अंदाजानीच करू या' भास्कराचार्य म्हणाले.

'२ चं घनमूळ म्हणजे काय?' गणूनी विचारलं.

'२ चं घनमूळ म्हणजे अशी संख्या हवी की तिचा तीन वेळा गुणाकार केला म्हणजे उत्तर २ येईल.' भास्कराचार्य म्हणाले.

‘म्हणजे ती संख्या २ पेक्षा कमीच असणार’ गणू म्हणाला.

‘अर्थातच. पण गणू ते काम मी केलं आहे मनातल्या मनात. १.३ ही संख्या घे. तिचा तीनदा गुणाकार कर.’ भास्कराचार्य म्हणाले. गणूनी १.३ × १.३ × १.३ हा गुणाकार फळ्यावर केला. उत्तर २.०९७ असं आलं.

‘हं. हा गुणाकार २ एवढा येतोय्. थोडासाच फरक आहे उत्तरात’ गणू म्हणाला.

‘मग आपण गोलाची त्रिज्या १.३ सेंटिमीटर धरू. आता गोलाचा पृष्ठभाग काढू.’ असं म्हणून त्यांनी फळ्यावर गणित केलं ते असं—

गोलाचा पृष्ठभाग = ४ × π × त्रि^{२}

= ४ × ३ × १.३ × १.३

= १२ × १.६९

= २०.२८ चौरस सेंटिमीटर.

‘बरोबर! गोलाचा पृष्ठभाग चौकोनी ठोकळ्या पेक्षा कमी आहे’ गणू आनंदानी म्हणाला. हे उत्तर भास्कराचार्यांनी म्हटल्याप्रमाणे येतं की नाही ह्याबद्दल त्याच्या मनात जरा धाकधूक होत होती. गणित बरोबर आल्याचं पाहून त्याला आनंद झाला होता.

‘भास्करकाका गोलाचं वैशिष्ट्य मला समजलं. पण आता एक शंका आलीये.’ गणू म्हणाला.

‘कसली शंका?’ भास्कराचार्यांनी विचारलं.

‘शंका अशी आहे की ह्या गणितात आपण गोल आणि चौकोनी आकाराचे ठोकळे घेतले. पण कागदावर चौरस आणि वर्तुळ काढलं तर त्यात वर्तुळाचं पण असंच वैशिष्ट्य असेल का?’ गणू म्हणाला.

‘तुझी शंका फार छान आहे गणू. पण वर्तुळाचं वैशिष्ट्य काय असेल असं तुला वाटतं?’ भास्कराचार्यांनी विचारलं.

‘दोन्ही आकृतींचं क्षेत्रफळ सारखं असेल तर चौकोनाच्या बाजूंच्या बेरजेपेक्षा वर्तुळाच्या कडेची लांबी कमी येईल, गणूनी नीट विचार करून सावकाश उत्तर दिलं.

‘अगदी बरोबर. आता प्रत्यक्ष गणित करून दाखव’ भास्कराचार्य म्हणाले.

गणूनी फळ्यावर वर्तुळाची सूत्रं लिहिली.

वर्तुळाचं क्षेत्रफळ = π × त्रि^{२}

वर्तुळाचा परिघ = २ × π × त्रि.
मग गणू म्हणाला

'चौरसाची बाजू २ धरू या. मग त्याचं क्षेत्रफळ ४ चौरस सेंटिमीटर आणि बाजूंची बेरीज ८ सेंटिमीटर येईल. आता वर्तुळाचं क्षेत्रफळ चौरसा एवढंच म्हणजे ४ चौरस सेंटिमीटर आहे. मग त्रिज्या नि परिघ किती येईल ते काढू. असं म्हणून त्यांनी ते गणित फळ्यावर केलं. ते असं.

$$\pi \times \text{त्रि}^2 = \text{वर्तुळाचं क्षेत्रफळ}$$

$$\therefore ३ \times \text{त्रि}^2 = ४$$

$$\therefore \text{त्रि}^2 = \frac{४}{३}$$

$$\therefore \text{त्रिज्या} = \sqrt{\frac{४}{३}} = \frac{२}{\sqrt{३}}$$

गणूनी स्वत:च डोकं लढवून ३चं वर्गमूळ $\sqrt{३}$ असं लिहिलेलं पाहून भास्कराचार्य खूष झाले. गणूनी पुढे गणित केलं.

$$\text{परिघ} = २ \times \pi \times \text{त्रि}$$

$$= २ \times ३ \times \frac{२}{\sqrt{३}}$$

$$= \frac{१२}{\sqrt{३}}$$

'भास्करकाका, आता काय करायचं? $\sqrt{३}$ चं उत्तर मला येत नाही' गणू म्हणाला.

'इतकं सगळं तू बरोबर केलयंस्. आता पुढचं मी करतो' भास्कराचार्य म्हणाले.

असं म्हणून त्यांनी गणूला पुढचं गणित करून दाखवलं.

$$\text{परिघ} = \frac{१२}{\sqrt{३}}$$

$$= \frac{४ \times ३}{\sqrt{३}}$$

$$= ४ \times \sqrt{३}$$

$$= ४ \times १.७३ \quad (\sqrt{३} = १.७३)$$

$$= ७.०२ \text{ सेंटिमीटर}$$

उत्तर अपेक्षेप्रमाणे आलेलं पाहून गणूला फारच आनंद झाला.

'गणू वर्तुळाचं आणखी एक महत्त्व सांगायलाच हवं तुला. आर्किमिडीज नावाचा ग्रीक शास्त्रज्ञ होत. त्यानी बऱ्याच निरीक्षणानंतर असं शोधून काढलं की कोणत्याही वर्तुळाच्या परिघाला त्याच्या व्यासानी भागलं तर उत्तर नेहमी सारखंच येतं. म्हणजे वर्तुळाचा परिघ आणि व्यास ह्यांचं गुणोत्तर कायम असतं. ह्या गुणोत्तराची नेमकी किंमत काढता येत नाही असं त्याला आढळलं. त्याची अंदाजी किंमत $\frac{२२}{७}$ असते. ह्या गुणोत्तराला आर्किमिडीजनी ग्रीक लिपीतलं एक अक्षर दिलं. ते अक्षर म्हणजेच π. त्याला 'पाय्' असं म्हणतात. आपला प किंवा इंग्रजी लिपीत p म्हणजे ग्रीक π. ह्या संख्येला पुढे गणितात फारच महत्त्व आलेलं आहे. किंबहुना π ही आर्किमिडीजची गणिताला मोठी देणगीच आहे असं म्हणायला हरकत नाही.' भास्कराचार्य म्हणाले.

एवढं सर्व होईपर्यंत बराच उशीर झाला होता. भास्कराचार्य गणूला म्हणाले

'गणू, उशीर झाला. आता पुरे. मग काय गोल श्रेष्ठ की चौकोन श्रेष्ठ ?'

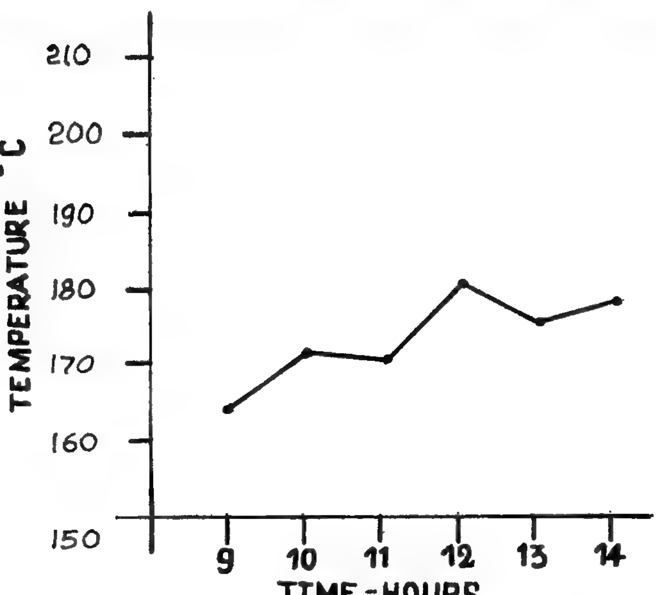
गणू हंसला. तो म्हणाला.

'तसं काही नाही काका, दोन्ही श्रेष्ठच ! पण गोलाची ही माहिती रामकाकांना सांगायला हवी' असं म्हणून गणू घरी गेला.

९

नेहमी प्रमाणे आजही शाळा सुटल्यावर दप्तर घरी ठेवून आणि शाळेचे कपडे बदलून गणू भास्कराचार्यांच्या घरी दाखल झाला. गणूच्या येण्याची भास्कराचार्यांनाही सवय झाली होती. ते काहीतरी कामात गुंतले होते पण त्यांचं अर्धं लक्ष गणू केव्हा येतो ह्याच्याकडे होते. इतक्यात गणू आलाच. आल्याबरोबर गणू नेहमी खोलीतल्या फळ्याकडे पहात असे. फळ्यावर नेहमी काही तरी नवं गणित त्याला दिसायचं. आज त्यानी पाहिलं तर फळ्यावर एक आलेख काढलेला त्याला दिसला. भास्कराचार्यांनी त्यांच्या अभ्यासासाठी तो काढून ठेवला होता. (आकृती १ पाहा)

आलेख पाहून गणूला मजा वाटली. कारण नुकतीच त्याच्या बाईंनी वर्गात आलेखाची गणितं शिकवली होती. भास्कराचार्यही आपल्या धड्यातल्यासारखे



आकृती १

आलेख काढतात हे पाहून त्याला जरा नवल वाटलं. आलेखाच्या बाजूला त्यांनी लिहिलेला इंग्रजी मजकूर काही त्याला समजला नाही. त्यानी भास्कराचार्यांना विचारलं,

'काका हा कसला आलेख काढला आहे तुम्ही?'

'कारखान्यातल्या एका कोठडीतल्या तापमानाची दर तासाला यंत्रावर आपोआप नोंद होते. त्याचा हा आलेख आहे' भास्कराचार्यांनी सांगितलं.

'आलेखाच्या बाजूला हे काय लिहिलंय् तुम्ही?' गणूनी प्रश्न केला.

'आलेखाच्या आडव्या रेघेखाली वेळेचे म्हणजे तासांचे आकडे आहेत. त्याच्या खाली 'टाईम' म्हणजे 'वेळ तासात' असं लिहिलं आहे उभ्या रेघेच्या बाजूला तापमानाचे आकडे आहेत. तिथे 'टेंपरेचर, म्हणजे तापमान—'सेल्सिअस' असं इंग्रजीत लिहिलंय्' भास्कराचार्यांनी खुलासा केला.

'पण असं दर तासाला तापमान नोंदायचं आणि त्याचा आलेख काढायचं कारण काय?'

'ज्या कोठडीतल्या तापमानाचा आलेख काढला आहे, तिथलं तापमान नेहमी १५०°C ते २००°C ह्यांच्या दरम्यान असायला हवं. तसं ते आहे की नाही हे सारखं तपासायला लागतं. त्या कोठडीत तापमान मोजणारं यंत्र आहे ते सतत आपोआप तापमानाची नोंद एका कागदावर करतं. यंत्रावर एक कागद बसवतात. त्याच्यावर तापमानाचा आलेख एकसारखा उठत रहातो. दर सहा तासांनी कागद बदलतात. त्या कागदावरच्या नोंदीवरून मी हा आलेख काढलाय्.' भास्कराचार्यांनी सविस्तर खुलासा केला.

'ह्या आलेखासाठी कोष्टक नाही का केलं तुम्ही?' गणूनी प्रश्न केला.

'नाही. कारण यंत्रानी आलेख काढलेलाच होता. त्यातले कांही बिंदू मी ह्या आलेखात काढले आहेत. मात्र आपण एखाद्या विषयाबद्दल माहिती गोळा करून तिच्यावरून आलेख काढला तर त्याचं कोष्टक करावं लागतं' भास्कराचार्य म्हणाले.

'पण कोष्टक केल्यावर आणखी आलेख कशाला काढायचा? कोष्टकातून माहिती कळते की?' गणू म्हणाला.

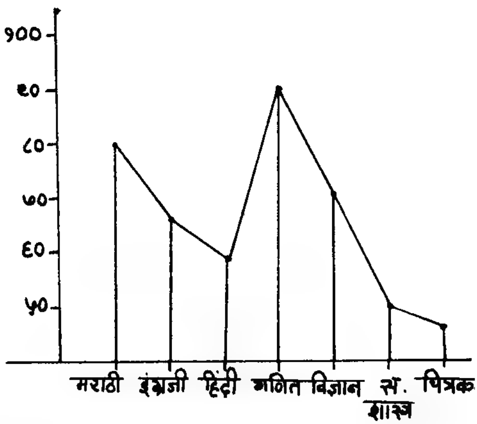
'हे बघ गणू, तुम्हाला बाईंनी आलेख काढायला शिकवलं तेव्हा कसला आलेख काढला होता सांग पाहू?'

‘आम्हाला इंग्रजी, मराठी, गणित अशा विषयात मिळालेल्या मार्कांचा आलेख काढायला सांगितला होता’ गणू म्हणाला.

‘मग तू तुझ्या मार्कांचं कोष्टक नि आलेख कसा काढलास ते दाखव पाहू फळ्यावर’ भास्कराचार्य म्हणाले.

मग गणूनी फळ्यावर खालील प्रमाणे कोष्टक लिहिलं आणि आलेखही काढला. (आकृती २ पाहा)

विषय	मार्क
मराठी	८०
इंग्रजी	६५
हिंदी	५६
गणित	९०
विज्ञान	७०
समाजशास्त्र	५०
चित्रकला	४५



आकृती २

‘छान! चांगला काढलायस् तू आलेख. आता मी विचारतो त्या प्रश्नांची फक्त कोष्टक पाहून उत्तरं दे बरं का?’ भास्कराचार्य म्हणाले.

‘कोणत्या विषयात तुला ७० पेक्षा जास्ती मार्क मिळाले?’

‘मराठी आणि गणित’ थोडा वेळ कोष्टकातील मार्क पाहून गणू म्हणाला.

‘तुझे कच्चे विषय कोणते?’

‘समाजशास्त्र नि चित्रकला’.

‘तुला सर्वात जास्ती मार्क कोणत्या विषयात आहेत?

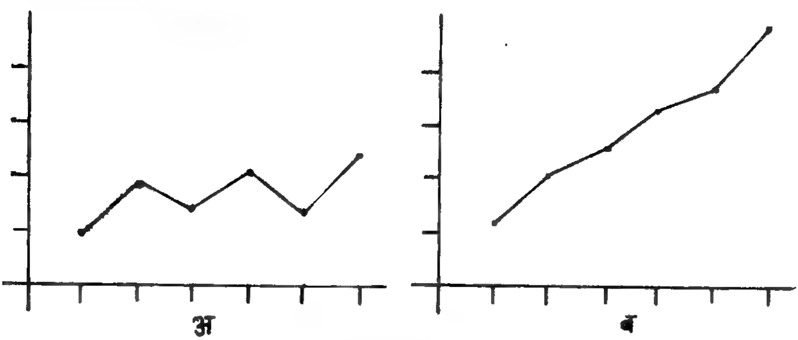
‘गणितात.’

‘छान आता ह्याच प्रश्नांची उत्तरं आलेखावरून सांग’. गणू आलेख पाहू लागला. मग त्याला एकदम हसू आलं. तो म्हणाला ‘बरोबर भास्कर काका!

कोष्टकापेक्षा आलेखावरून उत्तरं पटकन् काढता येतात. म्हणून आलेख हवाच काढायला'

'त्याचं कारण आहे गणू! कोष्टकातले आकडे पाहून कमी कुठला जास्ती कुठला हे ठरवायला वेळ लागतो. त्यापेक्षा आलेखातले बिंदू पाहून वर कुठला नि खाली कुठला हे ठरवायला फारच सोपं जातं. आता मी तुला आणखी गंमत दाखवतो.' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी कपाटातून एक पुस्तक काढलं.

'हे पहा, ह्यात दोन कंपन्यांना गेल्या वर्षात कसकसा नफा झाला त्याचे आलेख दिले आहेत. मी तुला फळ्यावर फक्त आलेख दाखवतो. त्यावरून कोणती कंपनी चांगली ते मला सांग' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी फळ्यावर दोन आलेख काढले.



आकृती ३

'ब कंपनी चांगली' गणू पटकन् म्हणाला.

'पहा कसलेही आकडे न पाहता तुला उत्तर सांगता आलं. ह्याचं कारण आलेखातले सगळे बिंदू एकदम नजरेत भरतात आणि त्यांची तुलना सहज करता येते' भास्कराचार्य म्हणाले.

'भास्कर काका, कधी कधी वर्तमानपत्रात पावसाचे आलेख काढलेले असतात. तेही आम्ही काढले तसेच असतात ना?' गणूनी विचारलं.

'हो ते आलेख तुम्ही काढता तसेच असतात. पण गणू ती तर आलेखांची नुसती सुरुवात आहे. आलेखांची खरी गंमत आणि त्याहीपेक्षा मजा पुढेच आहे' भास्कराचार्य म्हणाले.

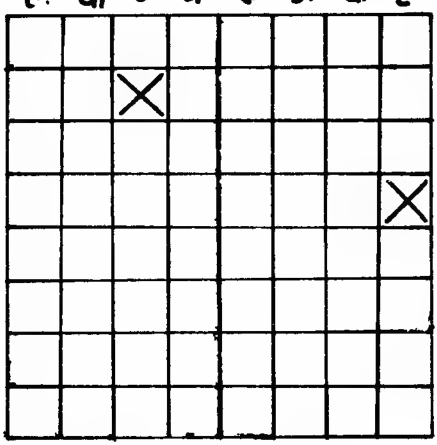
'मग मला सांगा ना ते' गणू उत्सुकतेनी म्हणाला.

'हे पहा गणू, आलेखात अनेक बिंदू काढावे लागतात. आणि त्यासाठी प्रत्येक बिंदूची नक्की जागा कोणती हे आधी ठरवावं लागतं. ते कसं ठरवतात ते आधी पाहू. तू बुद्धिबळ खेळतोस ना?' भास्कराचार्य म्हणाले.

'हो, खेळतो की, गणू म्हणाला.

'मग एखादं प्यादं, किंवा हत्ती, उंट असं मोहरं नेमकं कुठे ठेवलं हे कसं सांगतो आपण?' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी बुद्धिबळाचा पट टेबलावर ठेवला आणि एका घरात एक प्यादं ठेवलं. मग ते गणूला म्हणाले 'सांग पाहू, हे प्यादं मी कुठे ठेवलंय्?'

'हत्ती समोरच्या चौथ्या घरात-' गणू म्हणाला.



आकृती ४

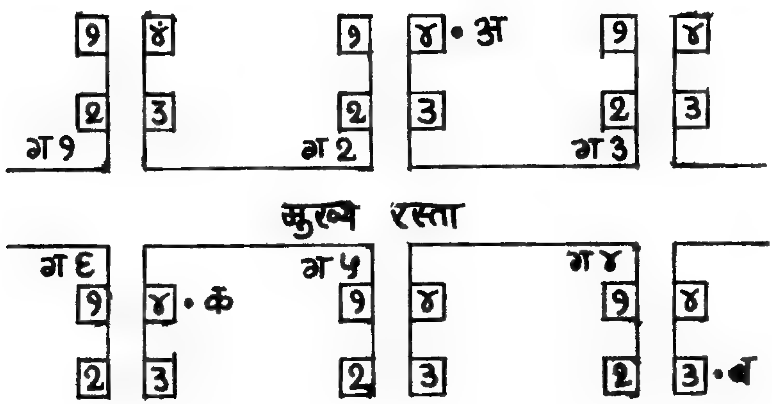
'आणि हे प्यादं कुठे ठेवलंय्?' आणखी एक प्यादं ठेवून भास्कराचार्य म्हणाले. (आकृती २ पहा)

'उंटा समोरच्या दुसऱ्या घरात' गणू म्हणाला.

'छान! म्हणजे प्रत्येक प्याद्याचं ठिकाण नक्की करायला आपण मोहरं कोणतं

नि त्याच्या रांगेतलं घर-कितवं अशा दोन गोष्टी सांगितल्या.' भास्कराचार्य म्हणाले. नंतर त्यांनी फळ्यावर एक चित्र काढलं. (आकृती ५ पहा) मग ते गणूला म्हणाले—

'ह्या चित्रात एक रस्ता आहे. त्या रस्त्याला आडव्या गल्ल्या आहेत. प्रत्येक गल्लीला नंबर दिलेला आहे नि प्रत्येक गल्लीतल्या घरांना पण नंबर दिले आहेत. आता मी दाखवतो ती अ, ब, क नावाची माणसं नेमकी कुठे आहेत. ते मला सांग.'



आकृती ५

'अ माणूस गल्ली नं. २ च्या ४ थ्या घराजवळ, ब हा गल्ली ४ च्या ३ ऱ्या घराजवळ आणि क हा गल्ली ६ च्या ४ थ्या घराजवळ आहे' गणू म्हणाला. मग त्याच्या लक्षात आलं की इथेसुद्धा प्रत्येक माणसाचं ठिकाण नक्की ठरवण्यासाठी दोन गोष्टी सांगितल्या आहेत. मग त्याच्या आणखी असं लक्षात आलं की त्यांनी वर्गात जे आलेख काढले होते. त्यातही उभ्या नि आडव्या रेषेवर दोन गोष्टी दाखवलेल्या होत्या. तो भास्कराचार्यांना म्हणाला—

'भास्करकाका, आलेखाचा प्रत्येक बिंदू निश्चित करायला कोणत्याही दोन गोष्टींची माहिती लागते हे समजलं मला.'

'शाबास! आता पुढे पाहू. आपण नेहमी जो आलेखाचा कागद घेतो,

त्याच्यावर उभ्या आणि आडव्या रेघा सारख्या अंतरावर काढलेल्या असतात. त्यामुळे कागदावर सारख्या आकाराचे लहान लहान चौरस तयार होतात. अशा उभ्या-आडव्या रेघा मारून प्रथम आलेखाची चौकट तयार करावी लागते. मग त्या रेघांपैकी एक आडवी आणि एक उभी अशा रेघा आपण घेतो. ह्या रेघांना आलेखाचे 'अक्ष' म्हणतात, मग अक्षांवर आकडे घातले की आलेखाची चौकट पूर्ण झाली असं समजायचं' गणूला आपण सांगतोय् ते समजतंय् की नाही हे पाहण्यासाठी भास्कराचार्य थांबले. त्यांनी फळ्यावर अशी एक चौकट कायमची रंगवून घेतली होती. तिच्यावर दोन अक्ष काढून त्यांच्यावर आकडे घालून दाखवले.

'गणू आता मी सांगतो ते लक्षात ठेव. मी पहिल्यांदा सांगीन तो आकडा आडव्या रेघेवर नि नंतर सांगीन तो आकडा तिथल्या उभ्या रेघेवर घ्यायचा. कळलं?' गणूनी होकारार्थी मान हलवली.

'हं, मग आता फळ्यावर (३, ४) हा बिंदू दाखव पाहू. गणूनी प्रथम आडव्या रेघेवर ३ आकडा घेतला. तिथून उभ्या रेघेवर ४ आकडा घेतला, नि बिंदू काढला. असे तीन, चार बिंदू त्यानी काढले. मग भास्कराचार्य म्हणाले,

'आलेखावरचे बिंदू कसे काढायचे तुला कळलं आता. आता पुढे पाहू.'

'आता क्ष आणि य अशा दोन संख्या घेऊ. ह्यात जेव्हा क्ष = १ असतो. तेव्हा य = २ असतो, क्ष = २ असतो तेव्हा य = ३ असतो. जर क्ष = ३ झाला. तर य किती होईल?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'क्ष = ३ असेल तेव्हा य = ४ होईल, कारण प्रत्येक वेळी य ची किंमत क्ष पेक्षा १ नी जास्ती आहे' गणू म्हणाला.

क्ष	१	२	३	४	५	६
य	२	३	४	५	६	७

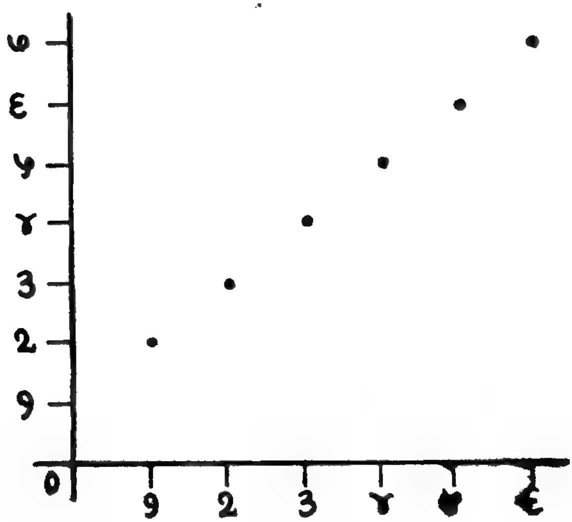
आकृती ६

'बरोबर. आता क्ष आणि यच्या चार, पांच किंमती घेऊन त्यांचं कोष्टक कर' भास्कराचार्य म्हणाले.

मग गणूनी कोष्टक तयार केलं. (आकृती ६ पहा).

'गणू आता प्रत्येक रकान्यात एक क्षची किंमत आणि एक यची किंमत अशा दोन संख्या आहेत. त्या संख्या म्हणजे आलेखावर बिंदू काढण्यासाठी दिलेल्या दोन संख्या आहेत असं समज. आणि फळ्यावर ते सगळे बिंदू काढून दाखव मला.' भास्कराचार्य म्हणाले.

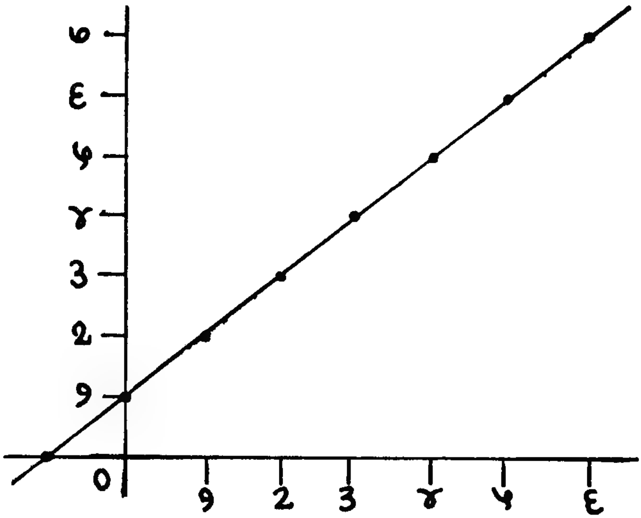
'गणूनी ते सगळे बिंदू फळ्यावर काढले. (आकृती ७ पहा) ते बिंदू पाहून गणूच्या मनात एक कल्पना आली.



आकृती ७

'काका, ह्या सगळ्या बिंदूची एक रेषा तयार झालीये.' तो म्हणाला.

'शाबास गणू, आता ती रेषा काढ पाहू' भास्कराचार्यांनी सांगितलं. मग गणूने ती रेषा काढली. (आकृती ८ पहा). गणूला आणखी एक कल्पना सुचली. तो म्हणाला—'काका, क्ष = ७ असेल तर य = ८ होईल. मग



आकृती ८

(७, ८) हा बिंदू ह्याच रेषेवर यायला हवा.' (आकृती ८)

'अगदी बरोबर. तसाच (०,१) हा बिंदू पण ह्याच रेषेवर हवा.तू ते बिंदू काढून पहा ना' भास्कराचार्य म्हणाले.

'गणूनी त्याप्रमाणे (७, ८) आणि (०, १) हे बिंदू फळ्यावर काढले. ते बरोबर रेषेवरच आले. ते पाहून गणूला आपला तर्क खरा ठरल्याचा आनंद झाला. तो म्हणाला,

'ही खूप गंमत आहे काका, म्हणजे यची किंमत क्ष पेक्षा १ नी जास्ती असली की तो बिंदू ह्या रेषेवरच येणार हे नक्की.'

'अगदी छान सांगितलंस गणू तू. आता य ची किंमत क्ष पेक्षा १ नी जास्ती आहे हे आपण समीकरणात लिहू.' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी फळ्यावर य = क्ष + १ असं लिहिलं.

'गणू, हे समीकरण आहे. आणि मगाशी तू काढलीस ती रेषा म्हणजे ह्या समीकरणाचा आलेख आहे' भास्कराचार्य म्हणाले.

'आणि काका, उलटं म्हटलं तर चालेल का, की य = क्ष + १ हे त्या

रेषेचं समीकरण आहे.' गणूनी विचारलं.

'हो चालेल की' भास्कराचार्य म्हणाले.

'म्हणजे काका, ह्या गणितात भूमिती आणि बीजगणित एकत्र झालं आहे, नाही का?' गणू म्हणाला.

'शाबास! तू अगदी नेमका मुद्दा सांगितलास. हे दोन विषय एकत्र करण्याचं काम देकार्ते नावाच्या फ्रेंच गणितज्ज्ञानी केलं. म्हणून आपण आलेखासाठी जी चौकट आखतो तिला 'कार्टेशिअन चौकट' असं म्हणतात. आपण क्ष, य च्या ज्या किंमती घेतो त्यांना बिंदूचे 'कार्टेशिअन सहनिर्देशक' असं म्हणतात.' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी गणूला देकार्तेचं चित्र दाखवलं आणि त्याच्या कामगिरीची माहिती सांगितली. (आकृती ९ पहा)



रेने देकार्ते (१५९६-१६५०): फ्रेंच गणितज्ज्ञ [illegible]
आकृती ९

'काका, मला एक शंका आली आ[illegible]' [illegible]

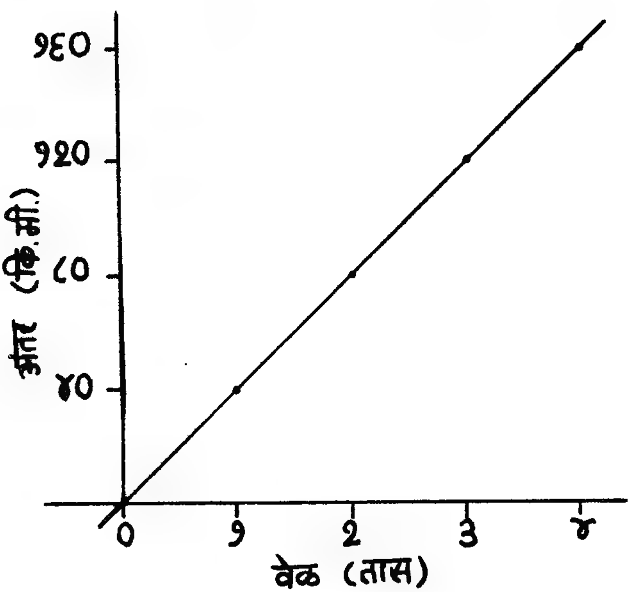
'विचार ना!' भास्करचार्य हंसत [illegible]

'आपण आलेख काढला त्यात [illegible]

काही सरळ रेषांचे येणार नाहीत. मग आलेखात कशी रेषा येईल हे ओळखता येतं का आपल्याला?'

'वा गणू, फार छान प्रश्न विचारलास तू' भास्कराचार्य खूष होऊन म्हणाले.

वेळ (तास)	1	२	३	४
अंतर (कि.मी.)	४०	८०	१२०	१६०



आकृती १०

'आता मी तुला आणखी एक आलेख काढायला सांगतो. एक मोटार दर ताशी ४० कि. मी. वेगाने जातीये. जर ती मोटार अगदी सारख्या वेगानी जात असली तर दर तासाला मोटार किती अंतरावर पोचली असेल त्याचा

आलेख काढ बघू.'

'मग गणूनी कोष्टक तयार केले आणि त्याचा आलेख काढला.

आलेखात सरळ रेषा आलेली पाहून गणू चकित झाला.

'काका, इथे पण सरळ रेषाच आली' तो म्हणाला.'

'बरोबरच आहे. मोटारीचा वेळ वाढला की अंतर वाढतं. म्हणजे वेळ आणि अंतर सम प्रमाणात असतात. समप्रमाणात बदलणाऱ्या दोन संख्या असल्या की त्यांच्या आलेखात सरळ रेषाच येते.' भास्कराचार्य म्हणाले.

'आणि व्यस्त प्रमाणातल्या संख्या असल्या तर काय होतं?' गणूनी विचारलं.

'आपण तसा एक आलेख काढूनच पाहू. समजा मला एक आयत म्हणजे काटकोन चौकोन काढायचा आहे. त्याच्या बाजू कशाही घेतल्या तरी चालतील, पण क्षेत्रफळ मात्र २४ चौ. सें. मी. यायला हवं. तर त्याच्या बाजू कशा घ्याव्यात? भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'समजा, लांबी ६ से. मी. असेल तर रुंदी ४ से. मी. येईल' गणू म्हणाला.

'बरं, लांबी ४ से.मी. असेल तर रुंदी किती येईल?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'मग रुंदी ६ से.मी. येईल. गणू म्हणाला. मग बाजूंच्या जोड्या कशा तयार करायच्या ते त्याला एकदम समजलं. तो हंसून म्हणाला 'कळलं काका, मी आता जोड्या लिहितो'

'असं म्हणून त्यांनी एका कोष्टकात आयताच्या बाजूंच्या जोड्या लिहिल्या. (आकृती ११ पहा).

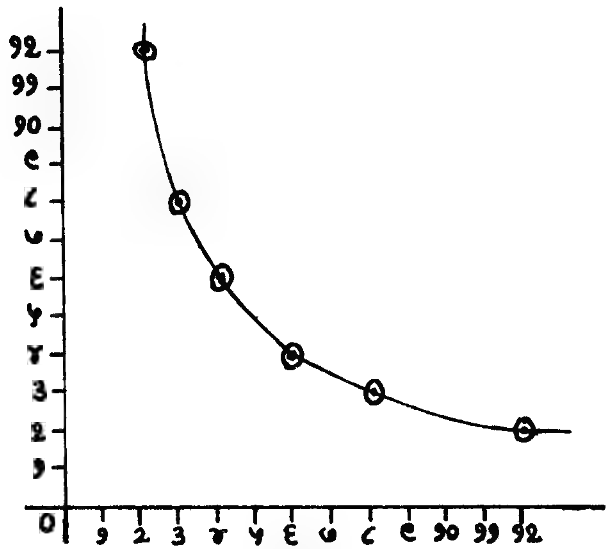
मग ह्या कोष्टकावरुन भास्कराचार्यांनी फळ्यावर बिंदू काढले आणि त्या बिंदूमधून जाणारी रेषाही काढली.

हे चित्र पाहून गणूला फारच आश्चर्य वाटलं. व्यस्त प्रमाण असलं तर समप्रमाणाच्या उलट जाणारी सरळ रेषा येईल असं त्याला वाटत होतं पण इथे तर एक मजेशीर वक्र रेषा आली होती. भास्कराचार्य गणूकडे पाहून हसत होते.

गणू, कसा वाटतो हा आलेख?' ते म्हणाले.

'छान आहे काका, आता मी व्यस्त प्रमाणाच गणित आलं की त्याचा असा आलेख काढीन' गणू म्हणाला.

लांबी	२	३	४	६	८	१२
रुंदी	१२	८	६	४	३	२



आकृती ११

' गणू हे आलेख काढणं हा शास्त्रज्ञांच्या कामाच्या फार महत्त्वाचा भाग आहे. एखाद्या प्रयोगात ज्या संख्या मिळतात त्यांचा आलेख काढला की त्या संख्यांमधे कोणत्या प्रकारचा संबंध आहे ते शास्त्रज्ञांना समजू शकतं.' भास्कराचार्य म्हणाले.

'म्हणजे मला आलेख शिकणं अगदी जरूरीचंच आहे. मी मोठा झाल्यावर शास्त्रज्ञ होणार आहे' गणू म्हणाला.

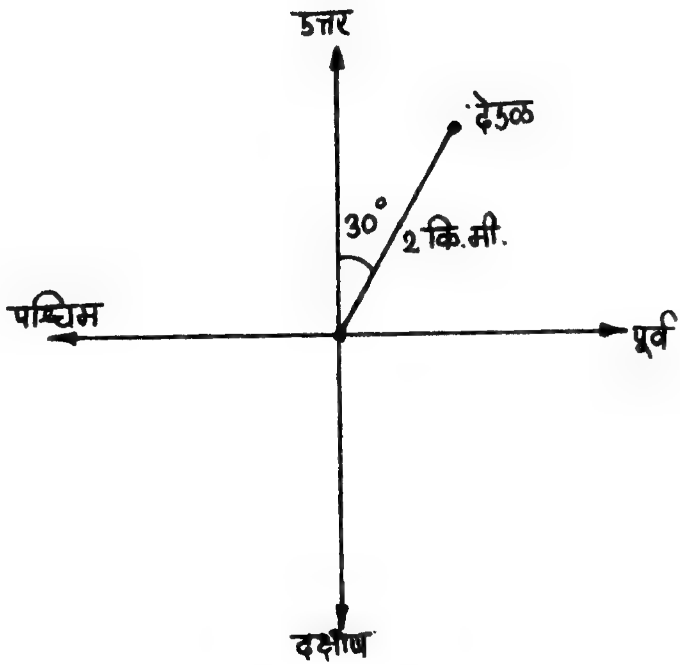
'भास्कराचार्य हंसले. 'अगदी अवश्य तू शास्त्रज्ञ हो, ते म्हणाले.

'काका आता मला एक शंका आली आहे ती विचारू का ?' गणू म्हणाला.

'विचार की, भास्कराचार्य म्हणाले.

‘काका, आलेखात उभ्या-आडव्या रेषांची कार्टेशिअन चौकट घेतात ना. मग नकाशावर अक्षांश - रेखांशांच्या आडव्या आणि उभ्या रेषा असतात. ती पण आलेखाची चौकटच असेल ना?’ गणूनी विचारलं.

‘शाबास गणू. अक्षांश-रेखांश ही सुद्धा आलेखाची चौकटच आहे. पृथ्वीवरच्या निरनिराळ्या ठिकाणांची जागा नक्की करण्यासाठी ती चौकट वापरतात. मुंबई शहर कुठे आहे हे नकाशात कसं शोधायचं? त्याची जागा ७२.८° पूर्व १८.९° उत्तर अशी सांगितलेली असते.’ भास्कराचार्य म्हणाले.



आकृती १२

‘आणि काका, आम्ही एखाद्या गावातल्या ठिकाणांचा नकाशा काढतो तेव्हा एक बिंदू मधोमध घेतो मि पूर्व-पश्चिम, उत्तर-दक्षिण अशा दिशा दाखवतो. मग देऊळ शाळेच्या उत्तर ३०° पूर्व ह्या दिशेला २ कि.मी. अंतरावर आहे असं दाखवतो. ती पण आलेखासारखी चौकटच समजायची ना?’ असं म्हणून गणूनी ते चित्र काढून दाखवलं.

'बरोबर. ती पण आलेखाची एक वेगळी चौकटच! ह्या चौकटीतले सहनिर्देशक म्हणजे एका कोनाचं माप आणि ठिकाणाचं मूळ बिंदूपासून अंतर. ह्या चौकटीचा उपयोग वैमानिक करतात. तसंच रडार यंत्राच्या पडद्यावर दिसणाऱ्या वस्तूचं स्थान ठरवायलाही हीच चौकट वापरतात.' भास्कराचार्य म्हणाले.

ह्या सगळ्या विषयात गणू इतका रंगला होता की घड्याळात आठाचे ठोके पडले तेव्हा तो एकदम भानावर आला.

'काका, उशीर झाला घरी जायला' तो म्हणाला.

'अरे हो, माझंही लक्ष नव्हतं घड्याळाकडे. आता आई ओरडेल तुला.' भास्कराचार्य म्हणाले.

'मुळीच नाही. तुमच्याकडे आल्यावर उशीर झाला तरी आई ओरडत नाही मला' गणू म्हणाला आणि घरी गेला.

१०

गणूला भास्कराचार्यांकडे जायला आज जरा उशीर झाला होता. तो भास्कराचार्यांच्या घरी पोहचला तेव्हा ते त्याची वाटच पहात होते. आज कॉलेजात त्यांनी नेमकी आलेखाच्या उपयोगांची गणितं घेतली होती. त्यातलं एक गणित त्यांनी गणूला दाखविण्यासाठी फळ्यावर करून ठेवलं होतं, नि ते त्याची वाट पहात होते.

'काय गणू, आज उशीर झाला वाटतं?' ते म्हणाले.

'हो, शाळेतनं घरी आल्यावर आईनी काम सांगितलं ते करून आलो' गणू म्हणाला. घरात शिरता शिरता गणूनी प्रश्न विचारायला सुरुवात केली.

'भास्करकाका, काल तुम्ही सरळ रेषेचा आलेख दाखवलात ना, तसा आलेख मी घरी काढून बघितला. एक समीकरण घेतलं, नि त्यांचं कोष्टक केलं, नि आलेख काढला. मग मला शंका आली.' गणू म्हणाला.

'कोणती शंका?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'शंका अशी आहे की आलेख फक्त समीकरणांचेच काढायचे असतात का?' गणूनी विचारलं. गणूची शंका ऐकून भास्कराचार्य एवढे खूष झाले की थोडावेळ त्यांना काय बोलावं हेच सुचेना.

मग ते म्हणाले,

'शाबास गणू! खूपच छान प्रश्न विचारलास तू. हे बघ आता आपण थोडे वेगळे आलेख काढू. त्यांना म्हणायचं असमीकरणांचे आलेख. समीकरणात दोन्ही बाजू सारख्या असतात. त्या ऐवजी असमीकरणात एक बाजू दुसरी पेक्षा मोठी असते.'

'हं, म्हणजे असे बाण काढून दाखवतात तेच ना?' गणूनी [illegible] < १०, ८ > ३ असं लिहून दाखवलं.

'बरोबर फक्त फरक इतकाच की आपल्या असमीकरणात [illegible] अक्षरंही असतात. म्हणजे क्ष + य > ४ हे एक असमीकरण [illegible] म्हणाले.

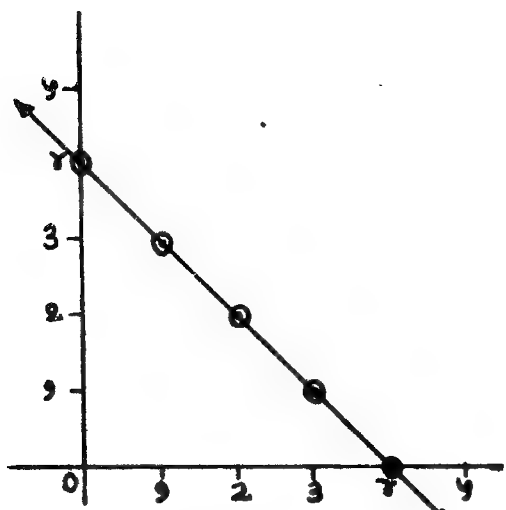
'मग त्याचा आलेख कसा काढायचा? [illegible]

का?' गणूनी प्रश्न केला. भास्कराचार्य हंसले. ते म्हणाले.

'आपण आता क्ष + य > ४ ह्याचाच आलेख काढून पाहू. पण त्यासाठी आधी क्ष + य = ४ चा आलेख काढायला हवा' असं म्हणून त्यांनी क्ष + य = ४ ह्या समीकरणाचं कोष्टक तयार केलं नि त्यावरुन आलेख काढला. (आकृती १ पहा).

'हं, आता ह्या रेषेमुळे फळ्यावरच्या बिंदूचे तीन गट झाले आहेत. सांग पाहू कुठले तीन गट ते?' भास्कराचार्यांनी गणूला जरा अवघड प्रश्न विचारला.

क्ष	0	१	2	3	४
य	४	3	2	१	0



आकृती १

होता. पण तो गडबडला नाही. इथे काही विचार करायला हवा हे त्यानी ओळखलं. थोडा वेळ विचार करून तो म्हणाला—

'रेषेवरच्या बिंदूंचा एक गट, रेषेच्या वर असलेल्या बिंदूंचा दुसरा गट आणि रेषेच्या खाली असलेल्या बिंदूंचा तिसरा गट'. भास्कराचार्यांच्या तालमीत तो चांगलाच तयार झाला होता.

'बरोबर आता क्ष + य = ४, ह्याचा आलेख कोणत्या गटात बसतो?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

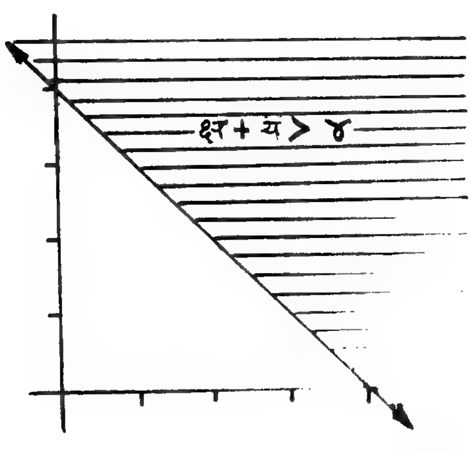
'पहिल्या गटात. म्हणजे रेषेवरचेच सगळे बिंदू' गणू म्हणाला.

'आणि क्ष + य > ४ ह्याचा आलेख कोणत्या गटात बसतो?' भास्कराचार्यांनी महत्त्वाचा प्रश्न सहज विचारला. आणि गणूनी अगदी सहज उत्तरही दिलं.

'हं, रेषेच्या वरचे सगळे बिंदू त्यात येतील. म्हणजे तो आलेख दुसऱ्या गटात बसणार!' गणू म्हणाला.

'पण भास्करकाका, एवढे सगळे बिंदू आलेखात दाखवायचे कसे?' गणूनी विचारलं.

'तुझी शंका अगदी बरोबर आहे गणू. ह्या आलेखातले बिंदू दाखवायला तेवढा भाग एखाद्या रंगानी रंगवतात किंवा पुष्कळ रेषा मारून तो भाग



आकृती २

दाखवतात. हे बघ, कसं ते मी दाखवतो' असं म्हणून त्यांनी आलेखातला रेषेवरचा भाग निळ्या रंगानी रंगवून दाखवला. आणि त्याच्यावर क्ष + य > ४ असं लिहिलं.

'काका, आता क्ष + य < ४ चा आलेख काढून झालाच की, त्याला काहीच करायला नको. फक्त रेषेखाली क्ष + य < ४ असं लिहिलं की झालं.' गणू म्हणाला.

'बरोबर आहे. हवं तर दुसऱ्या रंगानी तो भाग रंगवता येईल' भास्कराचार्य म्हणाले.

'पण काका, आता आणखी एक शंका आलीये. असले असमीकरणांचे आलेख कशासाठी काढत असतील?' गणूनी प्रश्न केला.

'अरे, तेच तुला दाखवण्यासाठी मी तुझी वाट पहात होतो. ते बघ, मी फळ्यावर गणित करून ठेवलंय्' भास्कराचार्य म्हणाले.

'गणूनी फळ्याकडे बघितलं. फळ्यावर एक कोष्टक लिहिलेलं. तीन चार असमीकरणं लिहिली होती नि आलेख काढले होते. गणूला ते नीट समजेना.

'थांब गणू, मी तुला गणित काय आहे ते समजावून देतो'

'भास्कराचार्य म्हणाले. त्यांनी फळ्यावरचं कोष्टक गणूला वाचायला सांगितलं.

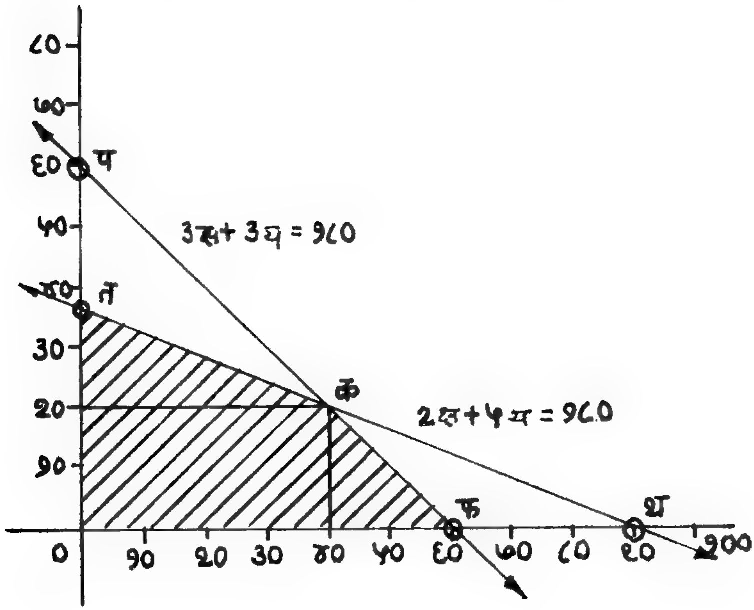
'ह्या कोष्टकात काय सांगितलंय् ते पहा. नकली दागिने बनविणारे दोन कारागीर आहेत. ते दोन प्रकारचे दागिने बनवतात. प्रत्येक प्रकारचा एक दागिना बनवायला त्यांना किती मिनिटं लागतात ते कोष्टकात दिलं आहे' ते म्हणाले.

	नमुना १	नमुना 2
कारागीर १	3 मि.	3 मि.
कारागीर 2	2 मि.	५ मि.

आकृती ३

‘इतक्या थोड्या वेळात दागिना कसा तयार होईल?’ गणू म्हणाला.

‘हे दागिने साच्यात घालून बनवतात. त्याला वेळ लागत नाही. भास्कराचार्यांनी खुलासा केला नि ते पुढे गणित सांगू लागले.



आकृती ४

१८० मि.

‘प्रत्येक कारागीर फक्त तीन तास काम करतो. त्यांनी केलेले दागिने एक दुकानदार घेतो. पहिल्या प्रकारच्या एका दागिन्यावर दुकानदाराला २ रु. नफा मिळतो. दुसऱ्या प्रकारच्या एका दागिन्यावर त्याला ४ रु, नफा मिळतो. आता गणू, प्रश्न असा आहे की दर दिवसाला प्रत्येक प्रकारचे किती दागिने बनवले तर दुकानदाराला जास्तीत जास्त फायदा मिळू शकेल?’ भास्कराचार्यांनी गणूकडे पाहिलं.

‘गणू, प्रश्न समजला ना तुला?’ त्यांनी विचारलं.

‘प्रश्न समजलाय्. पण सोडवायचा कसा ते कळत नाहीए.’ गणू म्हणाला.

'साहजिक आहे ते. हा प्रश्न काही सहज सुटणारा नाही. पण आलेखांचा उपयोग करून तो सोडवता येतो. आता असं समजू या की पहिल्या नमुन्याचे क्ष दागिने नि दुसऱ्या नमुन्याचे य दागिने केले तर दुकानदाराला जास्तीत जास्त फायदा होईल. ते सर्व दागिने त्यानी पहिल्या कारागिराकडून घेतले तर त्याला ते करायला ३क्ष + ३य इतकी मिनिटं लागतील. तो कारागीर फक्त ३ तास म्हणजे १८० मिनिटं काम करू शकेल. म्हणजेच ३क्ष + ३य ≤ १८० अशी अट पहिल्या कारागिराला पाळावी लागेल. समजलं का हे?' भास्कराचार्यांनी विचारलं. गणूनी होकारार्थी मान हलवली.

'मग सर्व दागिने दुसऱ्या कारागिरानी केले तर त्याची अट कोणती होईल सांग पाहू?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'ती अट २क्ष + ५य ≤ १८० अशी होईल.'गणू म्हणाला.

'बरोबर, आता मी काढलेले हे आलेख पहा' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी फळ्यावरची आलेखाची आकृती गणूला दाखवली. मग ते म्हणाले— (आकृती ४)

'पफ हा आलेख ३क्ष + ३य = १८० ह्या रेषेचा आहे, आणि तथ हा आलेख २क्ष + ५य = १८० ह्या रेषेचा आहे. क बिंदूत त्या रेषा छेदतात. म्हणजे क हा दोन्ही रेषांवर आहे. समजलं का?' भास्कराचार्यांनी विचारलं. गणूनी मान डोलावली.

'क बिंदू दोन्ही रेषांवर आहे ह्याला खूप अर्थ आहे गणू. तो तुला समजला का?' भास्कराचार्यांनी पुन्हा विचारलं.

'मला काय वाटतं ते सांगतो. ते बरोबर आहे का ते बघा. क बिंदू त्या रेषेवर आहे ह्याचा अर्थ असा की क चे सहनिर्देशक रेषेच्या समीकरणात घातले की ते बरोबर येतं.' गणू म्हणाला.

'अगदी बरोबर! पण हे तुला कशावरुन कळलं?'

'आपण कोष्टकातले सहनिर्देशक लिहिताना समीकरणावरुनच त्यांच्या किंमती काढतो, नि त्याच किंमती घेऊन रेषेवरचे बिंदू काढतो. त्याच्यावरुन मला तसं वाटलं' गणू म्हणाला.

'ठीक आहे. आता पुढचा प्रश्न विचारतो. आपल्या गणितात ३क्ष + ३य ≤ १८० असं असमीकरण आहे. त्याचा आलेख कुठे आहे ते दाखव पाहू.' भास्कराचार्य म्हणाले.

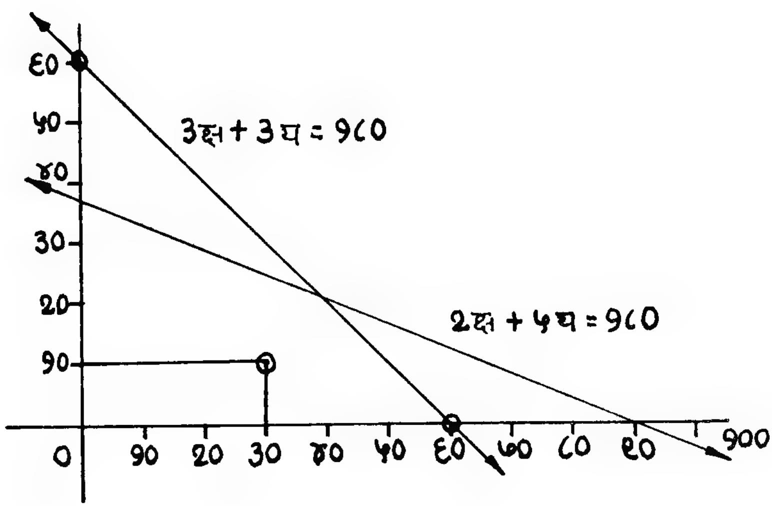
ते काय सोपं आहे. पफ रेषा नि तिच्या खालचे सगळे बिंदू घेतले की झाला त्याचा आलेख! गणू म्हणाला.

'बरोबर, तसंच तथ रेषा नि तिच्या खालचे सगळे बिंदू घेतले की २क्ष + ५य = १८० चा आलेख येईल.' भास्कराचार्य म्हणाले.

'हो आणि दोन्ही रेषांखाली येणारा भाग तुम्ही रंगीत केला आहे. होय ना?' गणूनी विचारलं.

'होय, त्या भागातल्या कोणत्याही बिंदूचे सहनिर्देशक घेतले तर त्यांच्यामुळे दोन्ही असमीकरणं एकदमच बरोबर ठरतात.' भास्कराचार्य म्हणाले.

'ते समजलं मला. पण समजा आपण (१०, २०) हा बिंदू घेतला तर त्याचा अर्थ काय होईल?' गणूनी प्रश्न केला.



आकृती ५

'त्याचा अर्थ असा होईल की दुकानदारला पहिल्या प्रकारचे २० दागिने आणि दुसऱ्या प्रकारचे १० दागिने करून हवे असले तर एका दिवसात त्याला ते मिळू शकतील. मात्र त्यानी होणारा नफा जास्तीत जास्त होणार नाही. भास्कराचार्य म्हणाले.

'नफा जास्तीत केव्हा होईल नि केव्हा नाही हे कसं काढायचं?' गणूनी शंका विचारली.

'त्याच्यासाठी आपल्याला रोजच्या नफ्याचं समीकरण लिहावं लागेल. त्यानी पहिल्या प्रकारचे क्ष दागिने केले आणि दुसऱ्या प्रकारचे य दागिने केले म्हणजे त्याला दिवसाला २क्ष + ४य इतका नफा होईल. ते समीकरण आपण नफा = प = २क्ष + ४य असं लिहू.' असं म्हणून त्यांनी फळ्यावर समीकरण लिहिलं.

'आता हेच समीकरण ४य = - २क्ष + प असं लिहिलं की त्याचा आलेख कसा येईल हे ठरवायला सोपं जाईल.' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी पुढील प्रमाणे त्यांना हवं होतं तसं ते समीकरण लिहिलं.

$$४य = -२क्ष + प$$

$$\therefore \quad य = -\frac{क्ष}{२} + \frac{प}{४}$$

मग ते म्हणाले-'ह्या समीकरणाशी जुळतील अशा पुष्कळ रेषा काढता येतील आणि प च्या पुष्कळ किंमती येतील पण समीकरणात प ची किंमत जास्तीत जास्त होण्यासाठी रेषा क बिंदूतूनच जायला हवी. नाहीतर असमीकरणाच्या अटींचा भंग होईल, किंवा नफा कमी होईल. म्हणजे क्ष = ४० आणि य = २० असं उत्तर आपल्याला मिळतं. ह्याचाच अर्थ असा की पहिल्या नमुन्याचे ४० आणि दुसऱ्या नमुन्याचे २० दागिने त्यांनी रोज केले तर त्याला जास्तीत जास्त फायदा होईल. तो फायदा २ × ४० + ४ × २० = १६०रु. असेल.' गणूला एवढं लांबलचक स्पष्टीकरण कळलं की नाही हे पाहण्यासाठी ते थांबले. गणू लक्षपूर्वक त्यांचं बोलणं ऐकत होता. ते का थांबले ते ओळखून तो म्हणाला.

'काका, मला समजलं तुम्ही काय म्हणता ते'

'ठीक आहे. आज आपण आता पुरे करू या आपला अभ्यास. शाळेत शिकवतात ते आलेख ह्या प्रश्नात उपयोगी पडतात इतक तुला नक्कीच समजलं असेल. आता परत केव्हा तरी आपण असले आणखी प्रश्न सोडवू.' असं म्हणून त्यांनी गणूला निरोप दिला. घरी जाणाऱ्या गणूकडे बघत भास्कराचार्य कौतुकानी हंसले नि घरात गेले.

११

भास्कराचार्य आपल्या खोलीत अभ्यासात मग्न होते. दुसऱ्या दिवशी शिकवण्याच्या विषयातली गणितं ते फळ्यावर करत होते. गणू कधी आला ते त्यांना समजलंही नाही. गणू शांतपणे उभा राहून त्यांच्याकडे पहात होता. भास्कराचार्यांचं अक्षर अतिशय सुंदर होतं आणि त्यांचं लिहिणंही अगदी नीटनेटकं असायचं. त्यांचं पाहून गणूही आता नीटनेटकं लिहू लागला होता नी त्यांच्यासारखं आपलंही अक्षर व्हावं म्हणून तो मनापासून प्रयत्न करीत होता. त्यामुळे त्याचं अक्षर खूपच सुधारलं होतं. भास्कराचार्य त्याला त्याच्या अभ्यासाबद्दलही नेहमी प्रश्न विचारत असत. त्यामुळे त्यांच्याकडे येताना शाळेत झालेल्या अभ्यासाची उजळणी करूनच गणू येत असे. त्यामुळे त्याचा अभ्यासही खूपच सुधारला होता. ह्या सगळ्याचा परिणाम म्हणजे शाळेत त्याचा नंबर आता बराच वर आला होता. भास्कराचार्यांचा सहवास गणूला फारच उपयोगी ठरला होता.

एक गणित पुरं करून भास्कराचार्य थांबले आणि मागे वळून त्यांनी पाहिलं तर गणू फळ्यावरचं गणित वाचताना त्यांना दिसला. ते हसले आणि म्हणाले,

'काय गणू, तू कधी आलास? मला समजलंच नाही.'

'मला येऊन थोडा वेळ झाला. तुम्ही गणित सोडवत होता म्हणून मी काही बोललो नाही' गणू म्हणाला.

'अस्सं. मग आज काही तुझे प्रश्नबिश्न असतील तर विचार आता' भास्कराचार्य म्हणाले.

'काका, आत्ता तुम्ही करताय् ती गणितं कसली आहेत? मला असं गणित येईल करता?' गणूनी विचारलं.

'असं गणित तुला करता येणार नाही इतक्यात. ते जरा कठिणच आहे. पण कसलं आहे ते तुला समजेल सहज' भास्कराचार्य म्हणाले.

'कसलं आहे ते गणित?' गणूनी विचारलं.

'मागे आपण कमळांचं गणित केलं होतं ते आठवतं का तुला?' भास्कराचार्य म्हणाले.

'हो, आठवतं ना.' गणू म्हणाला.

'त्या गणितात क्रमाक्रमानी वाढणाऱ्या संख्या आल्या होत्या' भास्कराचार्य म्हणाले.

'हो, १, २, ४, ८, १६ . . . अशा संख्या होत्या त्यात नी १, ३, ७, १५ . . . अशा पण संख्या त्यात होत्या' गणू म्हणाला.

'बरोबर. अशा संख्यांना श्रेढी म्हणतात. मी करतोय ती गणितं अशा श्रेढींची आहेत.' भास्कराचार्य म्हणाले.

'मला समजतील अशी श्रेढींची गणितं असतात की नाही, त्या कमळाच्या गणितासारखी ?' गणूनी विचारलं.

'आहेत ना! आता तुला सहज समजेल अशी एक सोपी श्रेढी सांगतो हं!' आता मी एक संख्या लिहिली की लगेच तिच्या पुढची संख्या तू लिहायची बरं का!' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी फळ्यावरची गणितं पुसून टाकली आणि फळ्यावर १ ही संख्या लिहिली. मग गणूनी पुढची २ ही संख्या लिहिली. भास्कराचार्यांनी तिच्यापुढे ३ ही संख्या लिहिल्यावर गणूनी ४ ही संख्या लिहिली. अशा रीतीनी फळ्यावर १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०, . . .अशी श्रेढी लिहून झाली. १० झाल्यावर भास्कराचार्यांनी गणूला म्हटलं.

'गणू ही एक श्रेढी तयार झाली आता.'

'ही तर अगदी सोपी आहे लिहायला' गणू म्हणाला.

'अशा किती संख्या लिहू शकतील तू ?' भास्कराचार्यांनी गणूला विचारलं.

'खूप, १०० पर्यंत, १००० पर्यंत, त्याच्याही पुढे मी लिहू शकेन' गणू म्हणाला.

'मग तुझी शेवटची संख्या किती असेल बरं ?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'१० कोटी . . . नाही १०० कोटी . . . नाही त्याच्यापेक्षाही मोठी संख्या लिहिता येईल . . . हं, समजलं मला काका, तुम्ही काय म्हणता ते' गणूच्या डोक्यात एकदम प्रकाश पडला होता.

'काय समजलं ?' भास्कराचार्यांनी हंसत हंसत प्रश्न केला.

'सर्वात मोठी संख्या लिहिणं शक्यच नाही होणार' गणू म्हणाला.

'कारण काय ?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'कारण, मी कोणतीही संख्या लिहिली तरी तिच्यापुढे आणखी संख्या असणारच. हे कधी संपायचंच नाही' गणू म्हणाला.

'शाबास! तुला माझा मुद्दा बरोबर समजला' भास्कराचार्य आनंदानी म्हणाले. त्यांच्या शाबासकीनी गणू खूष झाला.

'गणू ह्या श्रेढीतल्या संख्या कशा लिहायच्या ह्याचा नियम सांगता येईल का तुला?' भास्कराचार्यांनी विचारलं.

'हो. सोपा नियम आहे तो. प्रत्येक संख्येत १ मिळवला की तिच्या पुढची संख्या येते' गणू म्हणाला.

'बरोबर. आता मी आणखी एक श्रेढी लिहितो. तिच्यातल्या पुढच्या संख्या तू लिहायच्यास बरं का' भास्कराचार्य म्हणाले आणि त्यांनी फळ्यावर २, ४, ६ ह्या तीन संख्या लिहिल्या.

'हात्तीच्या! हे अगदी सोपं आहे' गणू म्हणाला आणि त्यांनी २, ४, ६, ८, १०, १२, १४, १६ . . . अशा संख्या लिहून श्रेढी दाखवली.

'काका ह्या सगळ्या समसंख्या आहेत ना? प्रत्येक संख्येत २ मिळवले की पुढची संख्या येते' गणू हंसत म्हणाला.

'बरोबर, छान नियम सांगितलास तू गणू' भास्कराचार्य म्हणाले.

'भास्करकाका, मी एक श्रेढी लिहू का?' गणूनी विचारलं.

'लिही ना!' भास्कराचार्य म्हणाले.

मग गणूनी फळ्यावर १, ३, ५, ७, ९, ११, १३, १५ . . . ही श्रेढी लिहिली.

'काका, ह्या सगळ्या विषम संख्या आहेत. आम्हाला बाईंनी शिकवलंय् सम आणि विषम संख्या म्हणजे काय ते.' गणू म्हणाला.

'विषम संख्या कशी ओळखायची सांग पाहू' भास्कराचार्य म्हणाले.

'जिला २ नी भाग जात नाही ती विषम संख्या. पण काका एक शंका विचारू का?' गणू म्हणाला.

'विचार ना' भास्कराचार्य म्हणाले.

'ह्या अशा श्रेढी लिहून पुढे त्यांचं काय करतात?' गणूनी विचारलं.

'वा! छान प्रश्न विचारलास. श्रेढींच्या बाबतीत पुष्कळ प्रकारे अभ्यास केला जातो. पण दोन प्रश्न सर्वात महत्त्वाचे मानले जातात. पहिला प्रश्न असा आहे की एखाद्या श्रेढीतल्या संख्या विशिष्ट मर्यादेच्या [illegible] की त्या अमर्याद मोठ्या होत जाणार? आपण दोन उदाहरणं घेऊन पाहू. १, २, ४, ८, १६, . . . ही श्रेढी घेतली तर तिच्या संख्या [illegible]

जाणार आणि त्यांना कोणतीही मर्यादा नाही. उलट १, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{८}$, $\frac{१}{१६}$ . . . ही श्रेढी पहा. ह्यातली प्रत्येक संख्या आधीच्या संख्येच्या निम्मी आहे. ह्या श्रेढीतली सर्वात मोठी संख्या १ आहे. श्रेढीतली सर्वात लहान संख्या कोणती हे सांगता येणार नाही. पण ती शून्यापेक्षा मोठीच असणार. म्हणजेच ह्या श्रेढीतल्या सर्व संख्या '१ पेक्षा लहान आणि ० पेक्षा मोठ्या' अशाच असणार. म्हणून ही श्रेढी १ ते ० ह्या मर्यादेतच रहाणार.' भास्कराचार्य एवढं बोलून थांबले नी गणूकडे पाहू लागले. एवढी माहिती त्याला समजली की नाही ह्याचा ते विचार करत होते. गणूला ते समजलं. तो म्हणाला.

'काका, हे समजलं मला. आता दुसरा प्रश्न कोणता ते सांगा'

'हं, श्रेढीच्या बाबतीत दुसरा प्रश्न असा की श्रेढीतल्या काही ठराविक किंवा सर्वच्या सर्व संख्या ओळीने घेऊन त्यांची बेरीज केली तर किती येईल?'

'श्रेढीत कितीही संख्या असल्या तरी त्यांची बेरीज करता येते?' गणूनी विचारलं.

'हो येते. श्रेढीतल्या ठराविक संख्यांची बेरीज कशी करायची ह्याची सूत्रं आहेत. तसंच श्रेढी न संपणारी असली पण मर्यादित असली तर तिच्या सर्व संख्यांची बेरीज करण्याचीही सूत्रं आहेत' भास्कराचार्य म्हणाले.

'मला समजतील का ती सूत्रं?' गणूनी विचारलं.

'हो, न समजायला काय झालं? ही बघ ती सूत्रं, असं म्हणून भास्कराचार्यांनी फळ्यावर दोन सूत्रं लिहिली.

$$\text{सं} = \frac{\text{अ}\ (\text{र}^{\text{न}} - १)}{\text{र} - \text{न}} \quad ....(१)$$

$$\text{स} = \frac{\text{अ}}{१ - \text{र}} \quad ....(२)$$

'गणू, ह्यातलं पहिलं सूत्र

$$\text{स} = \text{अ} + \text{अर} + \text{अर}^{२} + \text{अर}^{३} + \ .\ .\ .\ + \text{अर}^{\text{न}-१}$$

ह्या बेरजेसाठी आहे. ह्या श्रेढीत पहिली संख्या अ आहे, श्रेढीतल्या कोणत्याही संख्येला र ह्या एका ठराविक नी गुणलं की पुढची संख्या येते. ह्या बेरजेत एकूण न संख्या घेतल्या आहेत. आपण एक उदाहरण करून पाहू आता. आपण ३, ६, १२, २४, ४८ . . . ह्या श्रेढीतल्या पहिल्या १० पदांची बेरीज करू. म्हणजे स = ३ + ६ + १२ + २४ + ४८ + ९६ + १९२ +

३८४ + ७६८ + १५३६

सूत्राप्रमाणे अ = ३, र = २ व न = १०, म्हणून

$$स = \frac{३ (२^{१०} - १)}{२ - १} = ३ (१०२४ - १) = ३ \times १०२३ = ३०६९.$$

दुसरं सूत्र अशाच श्रेढीचं आहे. पण ती न संपणारी आहे आणि त्यात र ची किंमत १ पेक्षा कमी असली पाहिजे.

उदाहरणादाखल आपण १, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{८}$, $\frac{१}{१६}$, . . . ह्या न संपणाऱ्या श्रेढीच्या सर्व पदांची बेरीज करू. सूत्राप्रमाणे अ = १ आणि र = $\frac{१}{२}$ म्हणून

$$स = १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} + \frac{१}{१६} + . . .$$

$$= \frac{१}{१ - \frac{१}{२}}$$

$$= \frac{१}{(\frac{१}{२})}$$

$$= २.$$

एवढं सांगून भास्कराचार्य थांबले. गणू काळजीपूर्वक गणित वाचत होता नी त्याला ते चांगलं समजलंही होतं.

'गणू तुला आणखी एका श्रेढीची गंमत सांगतो बरं का. ती श्रेढी म्हणजे १, २, ३, ४, ५, ६, . . . हीच आहे. ह्या श्रेढीच्या हव्या तितक्या पदांची बेरीज करण्याचं सूत्र असं आहे' असं म्हणून भास्कराचार्यांनी फळ्यावर सूत्र लिहिलं.

$$स = \frac{न (न + १)}{२}$$

'ह्या सूत्रात न म्हणजे ह्या श्रेढीतली नव्या पदाची संख्या. म्हणजे १० पदापर्यंत बेरीज हवी असली तर न = १०; १०० पदांपर्यंत बेरीज हवी असली तर न = १०० असं. आता आपण पहिल्या १० पदांजी बेरीज आधी करू. म्हणजे

स + १+ २ + ३ + ४ + ५ + ६ + ७ + ८ + ९ + १०.

गणू तू आधी बेरीज करून उत्तर काढ पाहू' भास्कराचार्य म्हणाले.

गणूनी थोडा वेळ मनातल्या मनात बेरीज करून उत्तर काढलं.

'बेरीज ५५ येते' तो म्हणाला.

'बरोबर. आता सूत्राप्रमाणे करू.

$$स = \frac{न(न + १)}{२} = \frac{१०\times ११}{२} = ५ \times ११ = ५५.$$

'वा! हे सूत्र तर फारच छान आहे. पटकन् उत्तर येतं' गणू म्हणाला.

'गणू, ह्या गणिताच्या बाबतीत एका जगविख्यात गणितज्ज्ञाची गोष्ट प्रसिद्ध आहे. त्याचं नाव फ्रिडरिक गॉस. हा जर्मनीमध्ये होऊन गेला. त्यानी गणिताच्या प्रत्येक शाखेत महत्त्वाचे शोध लावून स्वतःचं नाव अजरामर करून ठेवलं. ही गोष्ट त्याच्या लहानपणातली आहे.

गॉस लहानपणापासूनच फार हुशार होता. तो प्राथमिक शाळेत असताना ही गोष्ट घडली. त्याच्या वर्गाचे शिक्षक मुलांना अभ्यासात गुंतवून स्वतः आराम करीत असत. एकदा त्यांनी मुलांना गणित घातलं — १ ते १०० आकड्यांची बेरीज करा. आता आपल्याला बराच वेळ आराम करायला मिळेल अशा खुशीत ते खुर्चीत बसणार इतक्यात गॉसने पाटीवर उत्तर लिहून ती खाली ठेवली, नी तो उभा राहिला. शिक्षकांना शंका आली की ह्यानी काहीतरी चुकीचं उत्तर दिलं असणार. त्यांनी पाटी पाहिली तर उत्तर अगदी बरोबर. पण पाटीवर उत्तराखेरीज काहीच लिहिलेलं नाही. ते म्हणाले "बेरीज कुठे केलीयेस्?" गॉस म्हणालला "मी तोंडी केलंय् गणित." शिक्षक चकित झाले. "कसं केलंस सांग पाहू?" ते म्हणाले. गॉसनी उत्तर दिलं — "मी १ ते १०० आकड्यांच्या १ + १००, २ + ९९, ३ + ९८, ४ + ९७ अशा जोड्या केल्या. प्रत्येक जोडीची बेरीज १०१ होते. अशा ५० जोड्या झाल्या. म्हणून १ ते १०० आकड्यांची बेरीज ५०५० येते." गॉसची हुशारी पाहून शिक्षक खरोखरच खूष झाले नी त्यांनी त्याला शाबासकी दिली.'

गणूला गोष्ट फारच आवडली.

'काका मला आणखी अशा गोष्टी सांगाल का?' तो म्हणाला.

'जरूर सांगीन. पण आता उशीर झालाय्. पुढे कधी तरी सांगीन' भास्कराचार्य म्हणाले.

घरी जाता जाता गणूच्या डोळ्यांपुढे गॉसची लहानगी मूर्ती तरळत होती. घर कधी आलं हेच त्याला समजलं नाही.

अश्वमेध प्रकाशन तर्फे प्रा. मोहन आपटे

यांची गणितावर आधारित पुस्तके

गणिताच्या पाऊलखुणा

(द्वितीय आवृत्ती)

संख्यांची अनोखी दुनिया

वर्तुळाचे गुपित

अविभाज्य संख्यांची कुळकथा

पास्कलचा त्रिकोण

पुस्तके सर्व प्रमुख विक्रेत्यांकडे उपलब्ध

किंवा

खालील दोन ठिकाणी मिळतील

अश्वमेघ प्रकाशन
१२४३, सदाशिव पेठ,
खुन्या मुरलीधराजवळ,
पुणे : ४११०३०
फोन : ४७१०६१

ज्ञानदा ग्रंथ वितरण
कृष्ण निवास,
मानपाडा रोड,
डोंबिवली (पू) ४२१२०१
फोन : ४७६९५२